



# Contribution à l'identification fréquentielle robuste des systèmes dynamiques linéaires

Nabil Torkhani

## ► To cite this version:

Nabil Torkhani. Contribution à l'identification fréquentielle robuste des systèmes dynamiques linéaires. Systèmes dynamiques [math.DS]. Ecole nationale des ponts et chaussées - ENPC PARIS / MARNE LA VALLEE, 1995. Français. <pastel-00574096>

**HAL Id: pastel-00574096**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00574096>**

Submitted on 7 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 19 788 (4)

# THÈSE

présentée à

École Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité :

MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE

X

par

Nabil TORKHANI

Sujet de la thèse :

**Contribution à l'identification fréquentielle  
robuste des systèmes dynamiques linéaires**

Soutenue le lundi 4 décembre 1995 devant le jury composé de

|                         |                    |
|-------------------------|--------------------|
| MM. Pierre Bernhard     | Président          |
| Andrea Gombani          | Rapporteur         |
| Jonathan R. Partington  | Rapporteur         |
| Laurent Baratchart      | Directeur de thèse |
| Armel De La Bourdonnaye | Examineur          |
| Juliette Leblond        | Examinatrice       |
| Mohamed Jaoua           | Examineur          |

ENPC.



INV03265



À la mémoire de mon père  
Aux sacrifices de ma mère  
À l'abnégation de Jamila et Saïda



## Remerciement

*la mission impossible !*

Je ne crois pas pouvoir exprimer par ces quelques lignes ma gratitude à tous ceux et celles qui m'ont permis de réaliser le présent travail et ma seule consolation reste la sincérité de ces quelques mots de remerciements.

Cette thèse, par l'intérêt et la richesse de son sujet, ne peut que témoigner ma reconnaissance à Laurent Baratchart. Sa grande compétence a donné de l'importance à mes interrogations et de la clarté à ses réponses.

Dans cette entreprise je ne peux décrire l'aide, le conseil et l'encouragement de Juliette Leblond. Aux delà de leur soutien scientifique je tiens plus particulièrement à remercier Juliette et Laurent pour la confiance, la patience et la compréhension qu'ils m'ont témoignées.

Je remercie très chaleureusement le Professeur Pierre Bernhard qui a suscité mon intérêt *pour le  $H^\infty$* , qui m'a sans cesse soutenu et encouragé et qui me fait, à présent, l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je ne m'aventurerai point à évaluer l'aide considérable de Jonathan Partington tout au long de cette thèse. Par sa grande compétence et sa modestie, ses conseils m'étaient toujours salutaires.

Je ne peux prétendre justement remercier Andrea Gombani pour sa précieuse aide et son généreux soutien durant cette dernière année de thèse.

À présent, Andréa Gombani et Jonathan R. Partington me font l'honneur de rapporter pour cette thèse.

Je remercie très chaleureusement le Professeur Mohamed Jaoua qui me fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux et de participer à ce jury.

Je remercie vivement Armel De La Bourdonnaye de son intérêt pour mon travail en acceptant de participer à ce jury.

Je remercie mes anciens professeurs Bernard Espiau et Jean-Paul Marmorat qui m'ont soutenu et encouragé pour commencer cette thèse. Jean-Paul Marmorat, par ses larges connaissances en informatique et en mathématiques, m'a très souvent apporté de précieux conseils.

Mes sincères remerciements vont à mes deux collègues et amies Nadia Maïzi et Pascale Fulcheri qui m'ont apporté un soutien inestimable et sans faille tant moral que scientifique tout le long de cette thèse.

Parce qu'une thèse c'est aussi livres et ordinateurs, je remercie amicalement Madame Odile Luguern ainsi que ses collaboratrices du centre de documentation, Christophe Caquineau ainsi que mes collègues du centre de calcul pour leur aide. Christophe Caquineau, par sa disponibilité et son expérience, a fortement contribué à la mise en œuvre numérique de mon travail sur la connection machine.

Pour terminer cette page en oubliant bien d'autres personnes, je remercie tous mes collègues et amis du projet MIAOU, José Grimm et Stéphane Dalmas du projet SAFIR, pour leur amitié et leur gentillesse.



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I Introduction : quelques généralités sur les systèmes et l'identification</b>                          | <b>1</b>  |
| <b>II Approximation dans les espaces de Hardy <math>H^p</math></b>   | <b>13</b> |
| II-1 Glossaire sur les espaces de Hardy . . . . .  | 13        |
| II-2 Quelques résultats de densité dans $L^p(K)$ . . . . .   | 18        |
| II-3 Approximation dans $H^p$ des fonctions de $L^p(K)$ . . . . .  | 19        |
| <b>III Le problème extrémal borné</b>  | <b>23</b> |
| III-1 Le problème extrémal borné . . . . .   | 24        |
| III-2 Le problème extrémal borné pour $p = \infty$ . . . . .   | 25        |
| III-2.1 Équivalence avec un problème de Nehari . . . . .   | 26        |
| III-2.2 Calcul de la solution du problème extrémal borné . . . . .   | 27        |
| III-3 Le problème extrémal borné pour $p = 2$ . . . . .  | 29        |
| III-3.1 Caractérisation de la solution du problème extrémal borné . . . . .                                | 31        |
| III-3.2 Calcul de la solution du problème extrémal borné . . . . .   | 31        |
| III-4 La complétion analytique bornée dans $H^2$ . . . . .   | 34        |
| III-4.1 Caractérisation de la meilleure complétion bornée . . . . .  | 36        |
| III-4.2 Calcul de la meilleure complétion bornée . . . . .   | 38        |
| III-5 Lien entre les deux problèmes . . . . .  | 40        |
| <b>IV Interpolation et approximation robustes</b>  | <b>43</b> |
| IV-1 Approximation par les polynômes de moindre déviation . . . . .  | 43        |
| IV-1.1 Les polynômes trigonométriques de moindre déviation . . . . .                                       | 44        |
| IV-1.2 Les inégalités de Bernstein et de Markov . . . . .  | 44        |
| IV-1.2.a Cas des polynômes algébriques . . . . .   | 45        |
| IV-1.2.b Cas des polynômes trigonométriques . . . . .  | 45        |
| IV-1.3 Retour à l'approximation polynômiale robuste . . . . .  | 46        |
| IV-2 Approximation par les polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin . . . . .                          | 49        |
| IV-2.1 Les polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin pour des points non équi-répartis . . . . .        | 50        |
| IV-2.2 Le produit de convolution $\bullet$ . . . . .   | 51        |
| IV-2.2.a Les noyaux de Dirichlet et de Fejér . . . . .   | 53        |
| IV-2.2.b Les polynômes de Jackson $\tilde{J}_{n,m}$ et de de la Vallée Poussin $\tilde{V}_{n,m}$ . . . . . | 55        |
| IV-2.3 Convergence robuste des polynômes $\tilde{J}_{n,m}$ et $\tilde{V}_{n,m}$ . . . . .                  | 57        |
| IV-2.4 L'évaluation numérique de $\tilde{J}_{n,m}$ et de $\tilde{V}_{n,m}$ . . . . .                       | 58        |
| IV-2.5 Retour aux points équi-répartis . . . . .   | 60        |
| IV-3 Applications en identification . . . . .  | 61        |
| IV-3.1 Les facteurs d'atténuation . . . . .  | 62        |
| IV-3.2 Restriction des fonctions . . . . .   | 63        |



|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>V</b>   | <b>Retour au problème d'identification robuste <math>H^\infty</math></b>     | <b>65</b> |
| V-1        | Interpolation robuste des données . . . . .                                  | 67        |
| V-2        | Approximation dans $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ . . . . .                       | 67        |
| V-2.1      | Retour au problème extrémal borné . . . . .                                  | 68        |
| V-2.2      | À la recherche d'un approximant continu . . . . .                            | 70        |
| V-2.3      | À propos du problème de Nehari classique . . . . .                           | 71        |
| V-2.4      | À la recherche d'un approximant continu (suite) . . . . .                    | 72        |
| V-2.5      | Calcul de l'approximant : résolution de l'équation implicite (115) . . . . . | 74        |
| V-3        | Résolution numérique du problème pondéré de Nehari . . . . .                 | 76        |
| V-3.1      | Limite radiale du facteur extérieur . . . . .                                | 77        |
| V-3.2      | Régulation du symbole du problème pondéré . . . . .                          | 78        |
| V-3.3      | Décomposition spectrale d'une matrice de Hankel . . . . .                    | 79        |
| V-4        | Schéma global de l'algorithme d'identification . . . . .                     | 80        |
| V-5        | Estimation de l'erreur d'approximation . . . . .                             | 81        |
| <b>VI</b>  | <b>Applications et résultats numériques</b>                                  | <b>83</b> |
| VI-1       | Identification des données fréquentielles partielles . . . . .               | 85        |
| VI-2       | Complétion analytique bornée . . . . .                                       | 89        |
| VI-3       | Polynômes de Jackson et de de la Vallée Poussin . . . . .                    | 90        |
| <b>VII</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>95</b> |

## Chapitre I

# Introduction : quelques généralités sur les systèmes et l'identification

La théorie des systèmes concerne le développement d'outils pour l'étude des correspondances entrée-sortie dans des domaines aussi variés que la biologie (modélisation des fonctions neuromusculaires, contrôle du rythme cardiaque ...), la chimie (colonnes de distillation, fours de cimenterie, chaudières ...), les télécommunications (traitement des signaux, multiplexage, radars ...), l'espace (stabilisation de satellites, déploiement d'antennes ...), l'automobile (ABS, contrôle de carburateur, contrôle de suspensions ...), la mécanique (contrôle des robots ...), l'acoustique (atténuation d'écho, sonars ...), l'hydrologie (modélisation des réseaux de biefs, de barrages, d'écoulements souterrains ...) pour n'en citer que quelques uns, en essayant de formaliser des structures communes à ces objets.

Un système est un objet composé d'éléments de différents types qui interagissent et produisent des signaux observables. Parmi ces signaux, on appelle sorties ceux qui émanent du système. Le système est en général soumis à des stimulations externes et on nomme entrées celles que l'on maîtrise. Les autres seront appelées perturbations.

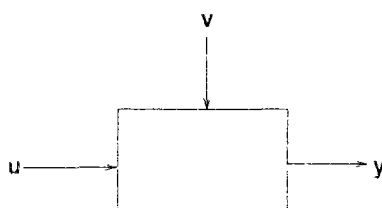


FIG. 1 –  $u$  : entrée ;  $y$  : sortie ;  $v$  : perturbation.

Pour décrire un système il faut préciser comment les variables sont reliées les unes aux autres. On appelle modèle une telle relation. Les modèles peuvent procéder de formalismes différents et des sophistications variables [50, 72, 35].

Pour des applications concrètes telle que l'automatisation d'un processus industriel, l'automaticien, ayant physiquement accès à certaines grandeurs caractérisant le processus, est amené à en faire une représentation mathématique adaptée aux besoins de la simulation et du contrôle de ce processus [63]. Le choix d'un modèle pose en règle générale le problème du compromis complexité-précision.

Pour mettre en équation la relation d'entrée-sortie du système, on dispose parfois de lois mécaniques, électromagnétiques ou autres régissant son fonctionnement interne (voir [23, Sect.I.1]).

Souvent le problème n'est pas pour autant résolu, soit parce que le modèle ainsi obtenu est trop compliqué, soit parce qu'il faut estimer les valeurs numériques de constantes dont la mesure directe n'est pas possible, soit les deux. Pour d'autres systèmes tels que les colonnes de distillation, les fours de cimenterie et les chaudières, les réseaux hydrauliques ou les dispositifs acoustiques et électromagnétiques par exemple, les phénomènes mis en jeu sont complexes et leur analyse interne n'est pas toujours envisageable ; se pose alors le problème de la détermination d'un modèle imparfait pouvant néanmoins rendre compte du comportement du processus. Cette approche, dite externe, consiste à considérer le système comme une boîte noire pour laquelle l'automaticien construit une fonction de transfert reliant les excitations qu'il lui impose aux réponses que le système délivre [27, Chap.9]. La construction d'un modèle à partir de données entrées-sorties constitue l'identification proprement dite. Zadeh écrivait en 1962 [81] : *L'identification d'un système est la détermination sur la base de la connaissance des entrées et des sorties de ce système, d'un modèle mathématique, appartenant à une classe de modèles fixés, ce dernier soumis aux mêmes signaux test étant alors équivalent au système donné (!).*

En pratique, le choix de la méthode d'identification est largement conditionné par la connaissance *a priori* que l'on a du système. Selon la classe de modèles considérés, on utilise des méthodes d'identification paramétriques ou non (voir [50, 72]).

Les méthodes paramétriques fixent *a priori* une classe de modèles de complexité bornée décrite par un ensemble fini de paramètres et par certaines hypothèses de nature stochastique sur le comportement des signaux et tâchent à déterminer les "meilleurs" paramètres possibles. Les méthodes non paramétriques ne bornent pas la complexité du modèle et s'attachent seulement à obtenir une certaine précision.

Comme décrit dans [81, 50, 72], l'élaboration d'un modèle se fait généralement en trois étapes. Une première étape permet de se doter de couples entrées-sorties définissant la réponse du système à certaines excitations externes. Ces données sont généralement expérimentales, souvent bruitées et incomplètes. La seconde étape, qui consiste à définir la classe des modèles parmi lesquels une solution sera recherchée, constitue l'étape clé de l'identification : ce choix prédéfinit les propriétés et les comportements souhaités pour le modèle et guide aussi les algorithmes. La troisième et dernière étape s'apparente à l'optimisation pour déterminer une "meilleure" solution au sein de cette classe, qui correspond à celle dont la nature et les propriétés répondront au mieux aux exigences fixées pour décrire le système initial.

Lorsque l'identification à partir des couples entrées-sorties conduit à des modèles trop compliqués pour simuler ou contrôler efficacement le système, l'automaticien réduit la complexité du modèle en restreignant le nombre de paramètres intervenant dans la description du système. On peut cependant perdre à ce stade certaines interprétations physiques.

Une classe importante qui nous occupera dans la suite est celle des systèmes dynamiques linéaires et stationnaires, qui représentent une approximation ou une idéalisation de maints comportements physiques autour d'un équilibre. Cette linéarisation permet dans plusieurs cas de modéliser convenablement le système en vue de son contrôle, tout en fournissant des modèles faciles à utiliser.

Une description mathématique des systèmes dynamiques linéaires, stationnaires et causaux est détaillée dans [27, 76, 73, 24, 7]. Un tel système est considéré comme un opérateur de convolution, qui à l'entrée  $u : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  associe la sortie  $y : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^p$  donnée par :

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau, \quad (1)$$

où  $h : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$  est la réponse impulsionnelle du système dont les colonnes correspondent formellement aux sorties engendrées par des impulsions de Dirac appliquées aux diverses composantes de l'entrée. On vérifie aisément que cette description est :

- linéaire en  $u$ ,

- stationnaire (un décalage dans le temps de l'entrée engendre le même décalage de la sortie),
- causal (la sortie à l'instant  $t$  ne dépend que des entrées aux temps  $\tau \leq t$ ).

L'application  $u \mapsto y$  relie les propriétés de stabilité du système à la bornitude de la réponse impulsionnelle (voir [27, 76, 73, 24, 7] pour de plus amples détails).

La transformée de Laplace  $H(s)$  de la réponse impulsionnelle  $h$  :

$$H(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt,$$

sur les conditions d'existence de laquelle nous reviendrons, peut être vue comme la fonction analytique (à valeurs matricielles) dont la trace sur l'axe imaginaire est la transformée de Fourier de  $h$ . L'usage de cette transformée permet de décrire l'action du système sur les transformées de Laplace des entrées et des sorties comme un produit ordinaire. En effet, si on pose :

$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt \quad \text{et} \quad Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt,$$

on obtient :

$$Y(s) = H(s) U(s) \quad (2)$$

sur le domaine de définition commun à ces trois fonctions lorsqu'il existe. Cette propriété ultraclassique autorise à traduire certains aspects de la stabilité du système en termes de fonctions analytiques. Ainsi, si on définit la norme  $L^1$  d'un vecteur ligne comme la somme des normes  $L^1$  de ses composantes et celle d'une matrice comme le maximum des normes  $L^1$  de ses lignes, cependant que la norme  $L^\infty$  d'un vecteur colonne est le maximum des normes  $L^\infty$  de ses composantes, alors la remarque la plus élémentaire est sans doute que la norme d'opérateur  $(L^\infty([0, \infty[))^m \rightarrow (L^\infty([0, \infty[))^p$  du système (1) n'est autre que la norme  $\|h\|_{L^1([0, \infty[)}$ . Un système dont la réponse impulsionnelle est sommable est pour cette raison qualifié d'*entrée bornée - sortie bornée*. Soit  $\mathcal{A}(\Pi^+)$  l'algèbre du demi plan droit qui, par définition, est formée des fonctions analytiques dans le demi-plan droit

$$\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

et continues sur le demi-plan fermé  $\overline{\Pi^+}$ , y compris à l'infini. Par les propriétés bien connues de la transformée de Fourier [70], les transformées de Laplace des fonctions de  $L^1([0, \infty[)$  forment une sous-algèbre de  $\mathcal{A}(\Pi^+)$  qu'on appelle l'algèbre de Wiener  $\mathcal{W}(\Pi^+)$ . La propriété qu'un système est *entrée bornée - sortie bornée* s'exprime à présent par le fait que sa fonction de transfert  $H$  appartient à  $(\mathcal{W}(\Pi^+))^{p \times m}$ .

D'autres propriétés, plus fines, peuvent s'énoncer dans le cadre des espaces de Hardy  $H^q(\Pi^+)$ . Nous renvoyons le lecteur au §II-1 pour une définition de ces espaces, et il nous suffira dans la présente introduction de savoir que ces derniers sont des sous-espaces fermés de  $L^q(i\mathbb{R})$  dont les éléments sont traces de certaines fonctions analytiques dans  $\Pi^+$ .

Ainsi, pour  $1 \leq q \leq 2$  et  $1/q + 1/q' = 1$ , l'appartenance de  $h$  à  $(L^q([0, \infty[))^{p \times m}$  entraîne celle de  $H$  à l'espace de Hardy  $(H^{q'}(\Pi^+))^{p \times m}$ . Symétriquement, si  $H$  appartient à l'espace de Hardy  $(H^q(\Pi^+))^{p \times m}$ , alors  $h$  appartient à  $(L^{q'}([0, \infty[))^{p \times m}$ . En effet, si  $\hat{f}$  désigne la transformée de Fourier d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , les inégalités de Hausdorff-Young s'écrivent :

$$\|\hat{f}\|_{L^{q'}(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad \text{pour } 1 \leq q \leq 2, \quad (3)$$

cependant que la formule de Cauchy montre facilement que la transformée de Laplace inverse d'une fonction de  $H^q(\Pi^+)$  s'annule pour  $t \leq 0$ .

Il est intéressant de noter que si  $1 < q < 2$ , l'inégalité ci-dessus est stricte pour  $f \neq 0$  (voir la meilleure constante dans ces inégalités due à Beckner [14] et Babenko [5]). Lorsque  $q' = \infty$ , il y a

parfois égalité (par exemple si  $f = e^{-t}$  pour  $t \geq 0$ ). Lorsque  $q' = 2$ , il y a toujours égalité : ceci n'est autre que la relation de Parseval.

Les espaces les plus utilisés dans ce contexte sont  $(H^2(\Pi^+))^{p \times m}$  et  $(H^\infty(\Pi^+))^{p \times m}$ , où les normes de la fonction de transfert admettent les interprétations suivantes qui toutes reposent, d'une façon ou d'une autre, sur l'identité de Parseval (voir [24, 50, 24, 72, 76, 7]). Lorsque  $H$  appartient à  $H^2(\Pi^+)^{p \times m}$  sa norme  $L^2$  est définie comme :

$$\|H\|_{L^2(i\mathbb{R})} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}\{H^*(jw)H(jw)\} dw \right)^{1/2}.$$

Dans le cas où  $H$  appartient à  $H^\infty(\Pi^+)^{p \times m}$  sa norme  $L^\infty$  est définie comme :

$$\|H\|_{L^\infty(i\mathbb{R})} = \sup_{w \in \mathbb{R}} \|H(iw)\|, \quad (4)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme d'opérateur  $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^p$ . Il est alors facile de voir que

$$\|H\|_{L^\infty(i\mathbb{R})} = \sup_{\substack{u \in (H^2(\Pi^+))^m \\ \|u\|_{(H^2(\Pi^+))^m} = 1}} \{\|Hu\|_{L^2(i\mathbb{R})}\}.$$

de sorte que cette quantité représente le gain

$$(L^2([0, \infty])^m \rightarrow (L^2([0, \infty])^p).$$

Pour le système de réponse impulsionnelle  $h$  et de fonction de transfert  $H$ , cette quantité, par le théorème de Parseval, est aussi égale à :

$$\|H\|_{L^2(i\mathbb{R})} = \left( \int_0^\infty \text{trace}\{h^T(t)h(t)\} dt \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Si  $[H_j]$  désigne la  $j$ -ème ligne de  $H$ , l'équation (1) conduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz à :

$$\sup_{1 \leq j \leq p} \| [H_j] \|_{L^2(i\mathbb{R})} \leq \sup_{\|u\|_{L^2([0, \infty])} \leq 1} \left\{ \sup_{t \geq 0} \|y(t)\|_2 \right\} \leq \|H\|_{L^2(i\mathbb{R})},$$

où  $\|\cdot\|_2$  symbolise la norme Euclidienne et où la première des inégalités ci-dessus s'obtient avec

$$u(t) = [h_j]^T(-t) / \| [h_j] \|_{L^2([0, \infty])}.$$

Nous voyons donc que la norme  $L^2$  de la fonction de transfert est une quantité équivalente (égale si  $p = 1$ ) au gain

$$(L^2([0, \infty])^m \rightarrow (L^\infty([0, \infty])^p).$$

Une autre interprétation s'obtient en considérant l'inégalité de convolution de Young :

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_q \|g\|_l \text{ pour } 1 \leq l, q \leq \infty \text{ et } f \in L^q, g \in L^l \text{ avec } 1/r = 1/q + 1/l - 1 \geq 0$$

(cf. [15, chap.4-(10)]), que l'on applique pour  $r = 2$ ,  $q = 2$  et  $l = 1$ . Il s'ensuit par l'inégalité de Schwarz que

$$\sup_{\|u\|_{L^1([0, \infty])} = 1} \|y\|_{L^2([0, \infty])} \leq \sqrt{m} \|H\|_{L^2(i\mathbb{R})}.$$

Par ailleurs, il découle de [7, chap.1] que

$$\sup_{\|u\|_{L^1([0, \infty])} = 1} \|y\|_{L^2([0, \infty])} \geq \|H\|_{L^2(i\mathbb{R})}.$$

Nous voyons donc que la norme  $L^2$  de la fonction de transfert est une quantité équivalente (égale si  $p = 1$ ) au gain

$$(L^1([0, \infty)))^m \rightarrow (L^2([0, \infty)))^p.$$

Il existe une troisième interprétation, de nature probabiliste cette fois : si  $u(t)$  est processus de Wiener, la variance du processus de sortie associé  $y(t)$ , qui ne dépend pas de  $t$  par stationnarité, n'est autre que la norme  $L^2$  de la fonction de transfert comme le montre le calcul simple suivant où  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y(t)^T y(t)] &= \mathbb{E} \left[ \iint_{\mathbb{R}^2} \{ du^T(\tau) h^T(t-\tau) h(t-\sigma) du(\sigma) \} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \iint_{\mathbb{R}^2} \text{trace} \{ h^T(t-\tau) h(t-\sigma) du(\sigma) du^T(\tau) \} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \text{trace} \{ h^T(t-\sigma) h(t-\sigma) \} d\sigma = \|H\|_{L^2(i\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Si l'on applique au système (1), l'entrée  $u(t) = \cos(\omega t) x$  (resp.  $u(t) = \sin(\omega t) x$ ) pour  $t \geq 0$  et pour  $x \in \mathbb{R}^m$ , la sortie correspondante est

$$y(t) = \text{Re} \left( e^{i\omega t} \int_0^t h(\tau) e^{-i\omega\tau} x d\tau \right) \quad \left( \text{resp.} \quad \text{Im} \left( e^{i\omega t} \int_0^t h(\tau) e^{-i\omega\tau} x d\tau \right) \right).$$

Lorsque  $h \in L^1([0, \infty[)$ , cette quantité est équivalente pour  $t$  grand à  $\text{Re} (H(i\omega) e^{i\omega t} x)$  (resp.  $\text{Im} (H(i\omega) e^{i\omega t} x)$ ). Ceci fournit une méthode très utilisée en pratique pour estimer expérimentalement la fonction de transfert d'un système *entrée bornée - sortie bornée* en des points de l'axe imaginaire : il suffit de lui appliquer une entrée périodique et de mesurer l'amplitude et le déphasage de la sortie correspondante, une fois le régime stationnaire établi.

Bien que la fonction de transfert soit un concept de prime abord plus abstrait que la réponse impulsionnelle, il est remarquable qu'elle soit bien plus facile à quantifier. Un ensemble de couples  $(i\omega, H(i\omega))$ , mesurés comme indiqué ci-dessus, constitue ce que l'on appelle des données harmoniques, ou encore des données ponctuelles en fréquence pour le système.

Notons que, jusqu'à présent, notre présentation n'a concerné que les systèmes dynamiques dits continus et dont l'évolution s'effectue en temps  $t$  continu. Or, dans bien des cas, on est amené à considérer des systèmes dynamiques en temps discret pour lesquels, néanmoins, les propriétés établies ci-dessus admettent des équivalents.

Un système discret (linéaire, stationnaire et causal), peut, comme son homologue continu, être représenté par une relation de convolution qui à l'entrée  $\{u_k\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$  associe la sortie  $\{y_k\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$  donnée, pour  $k \geq 0$ , par

$$y_k = \sum_{i=0}^k h_{k-i} u_i \quad (6)$$

où  $\{h_k\}_{k \geq 0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$  est la réponse impulsionnelle (appelée aussi suite des paramètres de Markov) du système.

La transformée en  $z$  (analogue discret de la transformée de Laplace) de la réponse impulsionnelle  $\{h_k\}_{k \geq 0}$ , définie formellement par (voir par exemple [27, Chap.8], [22, §1.3]) :

$$H(z) = \sum_{k \geq 0} h_k z^k, \quad (7)$$

est appelé fonction de transfert du système et, si  $U$  et  $Y$  désignent les transformées en  $z$  de l'entrée  $\{u_k\}$  et de la sortie  $\{y_k\}$ , on a

$$Y(z) = H(z) U(z),$$

en tout  $z \in \mathbb{C}$  où ces trois fonctions sont définies (ou même en tant que séries formelles). L'introduction de (7) nous amène à considérer des fonctions analytiques à l'intérieur du disque unité

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}.$$

Certains auteurs considèrent plutôt  $U(1/z)$ ,  $Y(1/z)$  et  $H(1/z)$  ce qui donne lieu à des fonctions analytiques pour  $|z| \geq 1$ . Il s'agit là d'une simple convention.

Comme dans le cas continu, la norme d'opérateur  $(l^\infty(\mathbb{N}))^m \rightarrow (l^\infty(\mathbb{N}))^p$  du système (6) est égale à  $\|\{h_k\}\|_{(l^1(\mathbb{N}))^{p \times m}}$  où les normes dans les espaces  $l^q(\mathbb{N})$  vectoriels ou matriciels étant définies comme précédemment.

Désignons par  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  l'algèbre du disque unité, formée par définition des fonctions analytiques dans  $\mathbb{D}$  et continues sur le disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}$  (voir §II-1). Les transformées en  $z$  de fonctions de  $l^1(\mathbb{N})$  forment dans  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  la sous-algèbre  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbb{D})$  encore appelée algèbre de Wiener. Ainsi la fonction de transfert d'un système discret *entrée bornée - sortie bornée* appartient à  $\mathcal{W}^{p \times m}$ .

Soit  $H^q = H^q(\mathbb{D})$  l'espace de Hardy du disque unité  $\mathbb{D}$  défini dans §II-1. Soit  $\mathbb{T}$  le cercle unité. Si  $f$  désigne la transformée en  $z$  d'une suite  $\{f_k\}$ :

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^k,$$

les inégalités de Hausdorff-Young s'expriment de la façon suivante [25, thm.6.1].

$$f \in H^q \implies \left( \{f_k\} \in l^{q'}(\mathbb{N}) \text{ et } \|\{f_k\}\|_{l^{q'}(\mathbb{N})} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{T})} \right) \text{ pour } \begin{cases} 1 \leq q \leq 2 \\ 1/q + 1/q' = 1. \end{cases}$$

Réciproquement,

$$\{f_k\} \in l^q(\mathbb{N}) \implies \left( f \in H^{q'} \text{ et } \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{T})} \leq \|\{f_k\}\|_{l^q(\mathbb{N})} \right) \text{ pour } \begin{cases} 1 \leq q \leq 2 \\ 1/q + 1/q' = 1. \end{cases}$$

Comme dans le cas continu, ceci permet d'établir que l'appartenance de  $\{h_k\}$  à  $(l^{q'}(\mathbb{N}))^{p \times m}$  entraîne celle de  $H$  à  $(H^q)^{p \times m}$  et, symétriquement, l'appartenance de  $H$  à  $(H^{q'})^{p \times m}$  implique celle de  $\{h_k\}$  à  $(l^q(\mathbb{N}))^{p \times m}$ .

Des démonstrations similaires à celles présentées dans le cas continu, permettent d'établir dans le cas discret les relations suivantes entre propriétés de stabilité du système (6) et bornitude de fonction de transfert.

Tout d'abord, la norme de la fonction de transfert  $H$  dans  $(L^\infty(\mathbb{T}))^{p \times m}$  est égale au gain entrée-sortie du système (6)

$$(l^2(\mathbb{N}))^m \rightarrow (l^2(\mathbb{N}))^p.$$

Par ailleurs, la norme  $H$  dans  $(L^2(\mathbb{T}))^{p \times m}$  représente, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, une quantité équivalente au gain

$$(l^2(\mathbb{N}))^m \rightarrow (l^\infty(\mathbb{N}))^p,$$

et aussi par (voir [4, thm5.1]) au gain

$$(l^1(\mathbb{N}))^m \rightarrow (l^2(\mathbb{N}))^p.$$

Finalement indiquons que la norme  $H$  dans  $(L^2(\mathbb{T}))^{p \times m}$  admet aussi une troisième interprétation de nature probabiliste puisqu'elle correspond, comme dans le cas continu, à la variance du processus de sortie lorsque l'entrée est un processus de Wiener.

Comme pour le cas continu, la fonction de transfert d'un système discret *entrée bornée - sortie bornée* peut être estimée expérimentalement en des points du cercle unité par la mesure en régime stationnaire de la sortie associée à des entrées périodiques. En effet, si  $u_k = \cos(\theta k) x$  (resp.  $u_k = \sin(\theta k) x$ ) pour  $k \geq 0$  et pour  $x \in \mathbb{R}^m$ , la sortie correspondante donnée par (6) :

$$y_k = \operatorname{Re} \left( e^{-i\theta k} \sum_{l=0}^k h_l e^{i\theta l} x \right) \quad \left( \text{resp.} \quad \operatorname{Im} \left( e^{-i\theta k} \sum_{l=0}^k h_l e^{i\theta l} x \right) \right),$$

tend, pour  $k$  grand et si  $\{h_k\}_{k \geq 0} \in l^1(\mathbb{N})$ , vers  $\operatorname{Re} (e^{-i\theta k} H(e^{i\theta}) x)$  (resp.  $\operatorname{Im} (e^{-i\theta k} H(e^{i\theta}) x)$ ). Un ensemble de couples  $(e^{i\theta}, H(e^{i\theta}))$  constitue ce que l'on appelle ici aussi des données harmoniques ou des données ponctuelles en fréquence pour le système.

Pour en finir avec ces parallèles entre les cas continu et discret, indiquons qu'il existe un automorphisme conforme entre fonctions de transfert en temps continu et fonctions de transfert en temps discret. Plus précisément, si  $\mathcal{M}$  désigne la transformation de Möbius

$$\mathcal{M} : s \in \Pi^+ \mapsto \frac{1-s}{1+s} = z \in \mathbb{D},$$

du demi-plan droit  $\Pi^+$  sur le disque unité  $\mathbb{D}$ , cette application envoie, d'une manière biunivoque, l'axe imaginaire  $i\mathbb{R}$  (domaine fréquentiel des systèmes continus) sur le cercle unité  $\mathbb{T}$  (domaine fréquentiel des systèmes discrets). De plus  $\mathcal{M}$  induit, à une constante multiplicative près et pour  $q \geq 1$ , une isométrie respectivement entre  $H^q$  et  $H^q(\Pi^+)$  et entre  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  et  $\mathcal{A}(\Pi^+)$  compte tenu de [25, thm.10.1] (ou de [43, chap.8]) :

$$f \in H^q \iff g(s) = \frac{1}{(1+s)^{2/q}} f\left(\frac{1-s}{1+s}\right) \in H^q(\Pi^+), \quad (8)$$

et

$$g \in H^q(\Pi^+) \iff f(z) = \frac{1}{(1+z)^{2/q}} g\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \in H^q. \quad (9)$$

Dans les deux cas, continu ou discret, un rôle particulier est joué par les fonctions de transfert rationnelles qui tiennent au fait qu'elles représentent des systèmes dont le comportement est régi par des équations différentielles (resp. récurrentes) linéaires

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \left( \text{resp.} \quad \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \right), \quad (10)$$

où  $A, B, C$  sont des matrices constantes dites respectivement matrices d'évolution, de contrôle et d'observation, cependant que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ) est une variable endogène appelée *état* du système à l'instant  $t$  (resp.  $k$ ). La valeur minimale de  $n$  est le degré de McMillan de la fonction de transfert qui s'écrit dans ce cas :

$$H(s) = C(sI_n - A)^{-1}B \quad \left( \text{resp.} \quad H(z) = C(zI_n - A)^{-1}B \right).$$

La possibilité de calculer des lois de contrôle en boucle fermée, c'est-à-dire procédant de l'observation de  $y(t)$ , en résolvant des équations algébriques définies par  $A, B$  et  $C$  fonde l'extrême importance de ce type de modèles [45, 44, 79, 21, 23]. Nous n'aurons cependant pas à nous en préoccuper dans ce travail.

Le présent travail s'inscrit dans une approche non-paramétrique de l'identification des systèmes dynamiques, linéaires, stationnaires et causaux à partir de données entrées-sorties particulières que sont les données harmoniques.



Le caractère non-paramétrique de notre approche nous autorise à traiter les fonctions de transfert composante à composante et à nous limiter au cas dit scalaire, c'est-à-dire au cas où le système a une entrée et une sortie :  $p = m = 1$ . Ceci sera toujours supposé désormais sauf mention explicite du contraire. *En conséquence, les caractères  $p$  et  $m$  ne constitueront plus dans la suite des symboles réservés pour désigner les nombres de sorties et d'entrées, et nous les utiliserons librement. Tous les systèmes seront supposés dans la suite dynamiques, linéaires, stationnaires et causaux.*

La contribution de ce travail à l'identification fréquentielle consiste principalement à prendre en compte le caractère local des données en fréquence. En effet, les modèles linéaires sont bien souvent des approximations, à l'intérieur d'une bande de fréquence correspondant à celle qui intéresse l'utilisateur, d'un système réel plus complexe qui exhibent un comportement non linéaire aux fréquences élevées. Il en résulte que les valeurs de la fonction de transfert d'un système réel ne peuvent généralement pas être obtenues pour des fréquences supérieures à une certaine borne sans mettre en défaut l'hypothèse de linéarité. Ainsi, dans les situations réalistes des problèmes d'identification, les données expérimentales ne sont disponibles que sur une bande limitée du domaine de fréquence du système.

Ceci est, par exemple, le cas pour un problème d'identification de filtre hyperfréquence qui nous a été soumis par le CNES<sup>1</sup> et qui constitue à la fois une motivation pour la présente étude et une validation sur des données industrielles des algorithmes que nous allons élaborer.

Le problème tel qu'il est posé par le CNES consiste à déterminer une approximation rationnelle de degré faible d'un filtre passe-bande aux alentours de 11 Ghz à partir de 801 mesures expérimentales de la fonction de transfert sur une bande de fréquences d'une largeur de 80 Mhz (voir [55] pour une description détaillée). On se préoccupe ici de la construction d'un modèle fidèle sur une bande de fréquences mais de grande complexité ; pour l'utiliser en pratique, il sera souvent nécessaire de lui substituer dans un deuxième temps un modèle plus simple typiquement obtenu par approximation rationnelle de degré réduit ([30, 31, 22, 7, 18, 52, 28]).

Plus généralement, considérons un système en temps continu. Supposons que ses propriétés de stabilité soient telles que sa fonction de transfert  $G \in H^p(\Pi^+)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , et que l'on se soit doté de mesures expérimentales  $\{\gamma_k\}_{1 \leq k \leq n}$  de  $G$  en les fréquences  $\{i\omega_k\}_{1 \leq k \leq n}$  d'un intervalle propre  $\Omega$  de l'axe imaginaire  $i\mathbb{R}$ . Ces valeurs  $\{\gamma_k\}$  sont supposées égales à  $\{G(i\omega_k)\}$  à une perturbation (additive) près :

$$\gamma_k = G(i\omega_k) + \kappa_k \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n,$$

où le bruit (éventuellement déterministe)  $\{\kappa_k\}_{1 \leq k \leq n}$  appartient à  $l^\infty$ . Nous supposons qu'aucune statistique n'est disponible sur les erreurs  $\{\kappa_k\}$ , qui proviennent autant des défauts de mesure que du caractère erroné de l'hypothèse de linéarité. Quant à savoir comment de telles données expérimentales sont obtenues et quant à l'analyse des perturbations dues au bruit et les hypothèses sur la nature du système que cela impliquerait, nous reportons le lecteur aux articles [38, 53] qui abordent ces questions en détail dans le cadre de l'identification robuste  $H^\infty$ .

Par la transformation de Möbius  $\mathcal{M}$  et les équivalences (8) et (9), on peut aussi bien poser ce problème en temps discret en associant à la fonction de transfert  $G$  introduite précédemment la fonction de transfert discrète  $g \in H^p$  dont les valeurs approchées  $\{a_k\}_{1 \leq k \leq n}$ , données aux fréquences  $\{z_k\}_{1 \leq k \leq n}$  de l'arc  $K \subset \mathbb{T}$ , sont définies par :

$$\begin{cases} K = \mathcal{M}(i\Omega) \subset \mathbb{T} \\ z_k = \mathcal{M}(i\omega_k) \in K \end{cases}, \quad \begin{cases} g(z) = \frac{1}{(1+z)^{2/p}} G(\mathcal{M}(z)) \\ a_k = g(z_k) + \eta_k \end{cases} \quad \text{avec} \quad \{\eta_k\} = \left\{ \frac{\kappa_k}{(1+z_k)^{2/p}} \right\} \in l^\infty.$$

Réciproquement, un problème discret peut se transcrire dans le formalisme continu grâce aux formules ci-dessus qui sont inversibles.

Dans la suite, nous avons choisi de mener l'étude dans le cas discret.

---

1. Dans le cadre d'une convention de recherche [55] passée entre le CNES (Centre Nationale d'Études Spatiales - centre de Toulouse) et les projets MIAOU et SAFIR de l'INRIA-Sophia Antipolis.

Indiquons d'abord que lorsque les données sont disponibles sur tout le cercle unité  $\mathbb{T}$  ( $K = \mathbb{T}$ ) et si  $\{z_k\}_{k \geq 0}$  est dense dans  $\mathbb{T}$ , le problème d'identification dit *robuste* a été abordé ces dernières années par de nombreux auteurs dans l'espace de Hardy  $H^\infty$  [34, 40, 56, 58]. Il consiste à trouver une approximation  $g_n = g_n(a_1, \dots, a_n) \in H^\infty$  qui converge vers la fonction  $g$  lorsque le nombre de mesure  $n$  tend vers l'infini et le niveau  $\epsilon$  du bruit tend vers zéro :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sup_{\| \eta \|_\infty \leq \epsilon} \| g_n - g \|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 0. \quad (11)$$

Les méthodes proposées pour la résolution de ce problème sont basées sur des algorithmes en deux étapes.

La première étape de ces algorithmes consiste à construire à partir des données  $a_1, \dots, a_n$ , une approximation ou une interpolation robustement convergente  $p_n$  continue sur  $\mathbb{T}$ . La seconde étape est alors la résolution du problème de Nehari [80] associé à  $p_n$  afin d'en déterminer la meilleure approximation  $g_n \in H^\infty$  sur  $L^\infty(\mathbb{T})$ .

Comme indiqué dans [33], la convergence robuste de la première étape est indispensable pour la convergence robuste globale de l'algorithme. Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour construire  $p_n$ . Citons par exemple, les séries de Fourier calculées sur des splines et corrigées par les facteurs d'atténuation (voir [40, 38, 39], mais aussi [37, sect. 3.2] et [34] pour de plus amples détails sur les méthodes d'interpolation utilisant les transformations de Fourier rapide ou discrète, ...), les ondelettes rationnelles à bases orthonormales [77], les opérateurs de Fejér et de la Vallée Poussin [56, 53, 34] et la transformation de Fourier inverse et les fonctions fenêtres [33].

Dans le cas particulier où les points de mesure  $z_1, \dots, z_n$  sont équi-répartis sur le cercle  $\mathbb{T}$ , les méthodes précédemment citées en vue de l'obtention de  $p_n$  sont simples. Comme détaillée dans [56], l'utilisation des polynômes de Jackson ou de la Vallée Poussin combinée avec une extension de Nehari conduit à un algorithme robustement convergent quand le nombre de mesures augmente et que le bruit s'atténue. Les polynômes de Jackson tels qu'ils sont définis dans [83] sont aussi considérés dans [34] comme sommes de Césaro et dans [33] via certaines fonctions-fenêtres. Cependant, lorsque les points de mesure ne sont pas équi-répartis, la première étape soulève quelques difficultés (voir [58]).

Plus généralement, dans le cadre des espace de Hardy  $H^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , ce problème pourrait être abordé par un algorithme en deux étapes dont la première serait similaire alors que la seconde se formulerait comme un problème extrémal dual (dont la version pour  $p = \infty$  est le problème de Nehari) pour trouver la meilleure approximation  $g_n$  de  $p_n$  dans  $H^p$ . Malheureusement, hormis dans le cas  $p = 2$  où elle correspond à une simple projection sur  $H^2$ , la résolution du problème extrémal dans  $H^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , n'est pas en général constructive.

Revenons au cas des données partielles et bruitées sur  $K$  d'une fonction de transfert  $g$  et adoptons l'idée d'un schéma global d'identification en deux étapes.

La première étape consisterait, ici aussi, à construire une interpolation ou une approximation  $p_n$  des données sur  $K$ . Cependant, la seconde étape, qui consisterait à trouver la meilleure approximation  $g_n \in H^p$  de  $p_n$  sur  $L^p(K)$ , soulève quelques problèmes quant au comportement de  $g_n$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . En effet, puisque, par [10, Thm.1-2], le sous-espace  $\mathcal{A}|_K$  (resp.  $H^p|_K$ ) des restrictions sur  $K$  des fonctions de  $\mathcal{A}$  (resp.  $H^p$ ) est dense dans l'espace  $C(K)$  des fonctions continues sur  $K$  (resp. dans l'espace  $L^p(K)$ ), alors la fonction  $p_n$  peut être approximée avec une précision arbitraire par des fonctions de  $\mathcal{A}|_K$  (resp. de  $H^p|_K$ ). Mais, par la proposition [10, Prop.3], si  $p_n$  n'est pas la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , aucune suite bornée de  $H^p$  ne peut converger vers  $p_n$  sur  $K$ .

Cette approche du problème d'identification à partir de données sur une bande restreinte de fréquences laisse apparaître la nécessité de disposer, sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , d'information complémentaire sur la fonction  $g$  ou d'imposer une certaine contrainte sur la norme de l'approximation  $g_n$ , à moins de négliger purement et simplement (!) le comportement de  $g_n$  en dehors de  $K$  comme, par exemple, dans le schéma réel proposé par [6].

Plus généralement, un résultat dû à Partington nous garantit que, si aucune information supplémentaire n'est disponible sur la fonction  $g$  (données sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , ordre de  $g$ , ...), il ne peut exister d'algorithme robustement convergent sur tout le cercle unité  $\mathbb{T}$ .

Une reformulation du problème classique d'identification robuste  $H^\infty$  est alors nécessaire pour traiter le cas où les mesures ne sont données que sur une bande limitée de fréquences. Nous proposons la formulation suivante, qui constitue la particularité de cette thèse; dans laquelle l'information *a priori* sur la fonction  $g$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  est introduite sous forme d'un comportement de référence  $h \in L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)$  que la meilleure approximation  $g_n \in H^\infty$  des données sur  $K$  doit suivre avec une tolérance (positive)  $r \in C(\mathbb{T} \setminus K)$ . Ainsi, sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , la fonction  $h$  nous permettra d'introduire la connaissance que l'on a *a priori* du comportement de  $g$  ou de spécifier l'allure de l'approximant tandis que la fonction  $r$  permet de *pondérer* cette information par rapport aux données expérimentales sur  $K$ . Par ailleurs, nous continuons à exiger un schéma robustement convergent mais cette fois-ci uniquement dans la bande de fréquences expérimentale c'est-à-dire sur  $K$ . Remarquons que l'introduction des informations  $h$  et  $r$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  rend cette formulation *tuned* au sens de la terminologie introduite par Nett et al. dans [40].

Plus précisément, soit  $K$  un sous-arc strict et symétrique du cercle unité  $\mathbb{T}$ , défini par :

$$K = \{e^{i\theta} : a \leq \theta \leq 2\pi - a\} \quad \text{où} \quad 0 < a < \pi, \text{ avec } \overline{\mathbb{T} \setminus K} = \{e^{i\theta} : -a \leq \theta \leq a\}.$$

Soit  $g$  une fonction de l'algèbre du disque  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  qui représente la fonction de transfert d'un système dynamique, linéaire, stationnaire, causal et stable en temps discret. Nous supposons que la fonction  $g$  est donnée par ses valeurs<sup>2</sup>  $(a_k = g(z_k) + \eta_k)_{-n \leq k \leq n}$  aux  $2n$  points  $(z_k)_{-n \leq k \leq n}$  de  $K$  et entachées d'un bruit  $(\eta_k)_{-n \leq k \leq n}$  appartenant à  $l^\infty$ . De plus nous ferons l'hypothèse que la fonction  $g$  appartient à la classe des modèles dans laquelle nous chercherons une meilleure approximation c'est-à-dire que  $g$  satisfait *a priori* la contrainte suivante sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  :

$$|g(z) - h(z)| \leq r(z), \quad \text{pour} \quad z \in \overline{\mathbb{T} \setminus K}, \quad (12)$$

où  $h$  et  $r$  sont deux fonctions continues sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  et  $r$  est telle que :

$$r(e^{\pm ia}) = 0 \quad \text{et} \quad r(z) > 0, \quad \forall z \in \mathbb{T} \setminus K.$$

L'identification robuste sur la bande de fréquences  $K$  consiste à construire, avec les données  $(a_k)_{-n \leq k \leq n}$ , une approximation  $g_n$  de  $g$  sur  $K$  qui converge robustement sur  $K$  au sens où :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \leq \epsilon} \|g_n - g\|_{L^\infty(K)} = 0;$$

nous imposons de plus que l'approximant  $g_n$  respecte asymptotiquement la contrainte sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \leq \epsilon} \left\{ \sup_{z \in \overline{\mathbb{T} \setminus K}} \{|g_n(z) - h(z)| - r(z)\} \right\} \leq 0.$$

Pour résoudre ce problème, nous avons développé un algorithme d'identification en deux étapes que nous détaillerons au chapitre V.

La première étape consiste à construire une approximation  $p_n$  des données :  $(a_k)_{-n \leq k \leq n}$  sur  $K$  et  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . La construction de  $p_n$  nous a donné l'occasion d'étudier, plus généralement,

2. Même si elle n'est pas nécessaire du point de vue mathématique, la théorie des systèmes induit la supposition sur  $g$  et  $g_n$  d'être réelles et symétriques. Nous étendons cette hypothèse sur le gabarit  $h$  de sorte que seules les mesures sur  $a \leq \theta \leq \pi$  sont indispensables. Les données sur  $\pi \leq \theta \leq 2\pi - a$  sont alors obtenues par conjugaison complexe.

l'approximation et l'interpolation robustes sur un sous-arc du cercle unité  $\mathbb{T}$ . Dans le chapitre IV, nous proposerons deux procédures simples d'approximation robuste à partir d'un ensemble de points denses et non équi-répartis dans  $K$  [75]. La première est une procédure de moindre déviation sur  $K$  et dont la convergence robuste est due aux inégalités de Bernstein et Markov. La seconde procédure étend l'utilisation des polynômes robustes de Jackson et de la Vallée Poussin aux cas des points denses et non équi-répartis à ce cas.

La deuxième étape se formule comme un problème extrémal (dual) borné [10, 3, 11] dans  $H^\infty$  ; ce dernier joue le même rôle que le problème d'extension de Nehari dans l'identification classique sur tout le cercle. Nous montrerons, dans le chapitre V, que ce problème extrémal (dual) borné admet une solution explicite [11]. Dans le chapitre III, nous rappellerons les résultats concernant le problème extrémal borné (dual) dans  $H^p$  dus à Baratchart et al. dans [10, 3] dans le cas où la contrainte est partout constante sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

Les fonctions  $h$  et  $r$  sont ainsi les deux paramètres du problème extrémal borné et du problème d'identification harmonique partielle. Leur ajustement nous permet de configurer l'allure de l'approximant sur  $K$  et sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . L'étude du problème extrémal borné nous a montré que pour chaque choix de  $h$ , l'accroissement de l'amplitude du gabarit  $r$  améliore la qualité de l'approximation sur  $K$  ; réciproquement, la diminution de l'amplitude de la tolérance  $r$  augmente l'écart entre l'approximant et les données sur  $K$ . Finalement, une bonne intuition de la complétion  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  diminue l'amplitude du gabarit  $r$  nécessaire à une bonne approximation des données sur  $K$ . Ainsi, par un ajustement de  $h$  et  $r$ , il est possible de choisir un compromis entre la qualité de l'approximation des données sur  $K$  et l'allure de l'approximant sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

Le choix simultané de ces deux paramètres est cependant un problème difficile. Lorsque l'on suppose le bruit petit, une voie possible pour déterminer  $h$  est de la chercher comme une fonction de norme raisonnable qui étend les données à tout le cercle de façon à ce que l'ensemble soit aussi proche que possible de  $H^\infty$ . Ceci amène naturellement à considérer pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , le problème quelque peu dual du problème extrémal borné que constitue la meilleure complétion : la recherche, pour  $f \in L^p(K)$  fixée, d'une fonction  $\tilde{h} \in L^p(\mathbb{T} \setminus K)$  de norme au plus égale à  $C$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  telle que

$$\text{dist}(f \vee \tilde{h}, H^p) = \min_{\substack{h \in L^p(\mathbb{T} \setminus K) \\ \|h\|_{L^p(\mathbb{T} \setminus K)} \leq C}} \text{dist}(f \vee h, H^p),$$

où  $f \vee h$  désigne la fonction qui vaut  $f$  sur  $K$  et  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Ce problème sera appelée un problème de complétion analytique bornée dans  $H^p$  et sera étudié dans le chapitre III pour  $p = 2$ . Nous montrerons [12] que ce problème admet une solution explicite et est équivalent au problème extrémal borné dans  $H^2$ . La version  $H^\infty$  a été récemment résolue par [9].

Le dernier chapitre de cette thèse sera consacré aux résultats numériques de cette étude. Les logiciels ayant permis l'obtention de ces résultats sont développés en Fortran 90 sur la Connection Machine CM200 de l'INRIA [74].

En résumé, les principales contributions de cette thèse sont le chapitre V, le problème de la meilleure complétion bornée  $H^2$  traité à la fin du chapitre III et, dans une certaine mesure, l'interpolation robuste du chapitre IV.



## Chapitre II

# Approximation dans les espaces de Hardy $H^p$

En décrivant, comme nous l'avons déjà indiqué au chapitre précédent, un système par sa fonction de transfert et lorsque l'entrée en est un signal périodique, les données harmoniques (expérimentales) correspondent à des estimations de cette fonction de transfert en certaines fréquences de la bande passante du système; ainsi le problème d'identification des données fréquentielles s'exprime, après une première étape d'interpolation ou d'approximation de ces données, comme un problème d'approximation d'une fonction de l'espace de Lebesgue  $L^p(\mathbb{T})$  ou de reconstruction d'une fonction de l'espace de Hardy  $H^p$  à partir de sa restriction sur un sous-ensemble de son domaine de définition (voir [40, 57, 8] pour plus de détails sur le lien entre les problèmes d'approximation dans  $H^p$  et les problèmes d'identification robuste).

Le problème d'approximation dans  $H^p$  des fonctions de  $L^p(\mathbb{T})$  est toujours bien posé en vertu des propriétés de fermeture et de compacité des espaces  $H^p$  comme nous le rappellerons en section II-1, mais la qualité de cette approximation reste limitée puisque la distance à  $H^p$  de toute fonction de  $L^p(\mathbb{T})$  est toujours positive à moins que cette fonction ne soit déjà la trace sur  $\mathbb{T}$  d'une fonction analytique.

Dans ce chapitre, nous aborderons le problème d'approximation des fonctions de  $L^p(K)$  par des fonctions de  $H^p$  sur un sous-ensemble strict  $K$  du cercle unité  $\mathbb{T}$ . Après un glossaire sur les espaces de Hardy, nous reprendrons de [60, 10, 2] les résultats de densité dans  $L^p(K)$ . Ceux-ci montrent qu'il est alors possible d'imposer la qualité de l'approximation sur  $K$  en autorisant une plus grande latitude de variation de la norme de cette approximation sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Nous rappellerons ensuite sans démonstration quelques procédures constructives d'approximation détaillées dans [68, 60, 78].

Les résultats de ce chapitre seront appliqués au problème extrémal borné pour les cas  $p = 2$  et  $p = \infty$  que nous étudierons au chapitre III.

## II-1 Glossaire sur les espaces de Hardy

Nous regroupons ici quelques définitions et propriétés relatives aux espaces de Lebesgue  $L^p$  et de Hardy  $H^p$ . De plus amples détails ainsi que les démonstrations des résultats mentionnés peuvent être trouvés dans [25, 29, 46, 43, 70] pour les espaces de Hardy et dans [70, 13, 16] pour les espaces de Lebesgue.

Rappelons que nous avons déjà défini le cercle unité  $\mathbb{T}$ , le disque unité  $\mathbb{D}$  et le demi-plan de droite  $\Pi^+$  respectivement par :

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}, \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\} \quad \text{et} \quad \Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

Soit  $f$  une fonction définie dans le disque  $\mathbb{D}$ . Introduisons, lorsqu'elles existent, les moyennes intégrales suivantes :

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} \quad \text{pour } 0 < p < \infty,$$

et

$$M_\infty(r, f) = \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|.$$

Alors l'espace de Hardy  $H^p = H^p(\mathbb{D})$ , pour  $0 < p \leq \infty$  comme l'ensemble des fonctions analytiques  $f$  dans le disque unité  $\mathbb{D}$  pour lesquelles la quantité  $M_p(r, f)$  reste bornée lorsque  $r \rightarrow 1$ . Sur  $H^p$ , pour  $1 \leq p \leq \infty$ , on introduit les normes  $\|\cdot\|_{H^p}$  suivantes :

$$\forall f \in H^p, \quad \|f\|_{H^p} = \lim_{r \rightarrow 1} M_p(r, f) = M_p(1, f), \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty,$$

et

$$\forall f \in L^\infty(i\mathbb{R}), \quad \|f\|_{L^\infty(i\mathbb{R})} = \sup_{-\infty < \omega < \infty} |f(i\omega)|$$

qui confèrent à  $H^p$  une structure d'espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$  (cf. [25, chap.3-Cor.1]).

Rappelons que  $H^\infty$  est l'espace de Hardy des fonctions analytiques et bornées dans le disque unité  $\mathbb{D}$ . Nous noterons par  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  l'algèbre du disque  $\mathbb{D}$ , sous-ensemble de  $H^\infty$  constitué des fonctions continues dans le disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}$ .

Soit  $L^p(\mathbb{T})$ , pour  $0 < p < \infty$ , l'espace de Lebesgue des fonctions définies sur le cercle unité  $\mathbb{T}$  et dont la puissance  $p$ -ième du module est intégrable; et soit  $L^\infty(\mathbb{T})$  l'espace des fonctions définies et essentiellement bornées sur  $\mathbb{T}$ . Ces espaces  $L^p(\mathbb{T})$ , pour  $1 \leq p \leq \infty$ , munis des normes suivantes  $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})}$  définies par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{T}), \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} \quad \text{pour } 0 < p < \infty,$$

et

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{T}), \quad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(e^{i\theta})|$$

sont des espaces de Banach (cf. [43, chap.1]).

Pour toutes fonctions  $u \in L^p(K)$  et  $v \in L^p(\mathbb{T} \setminus K)$  pour  $0 < p \leq \infty$  et  $K \subset \mathbb{T}$ , on notera  $u \vee v$  leur concaténation dans  $L^p(\mathbb{T})$  et qui vaut  $u$  sur  $K$  et  $v$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Pour toute fonction  $u \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $0 < p \leq \infty$ , et pour tout sous-ensemble  $K$  de  $\mathbb{T}$ , nous désignerons par  $u|_K$  sa restriction sur  $K$ .

On appelle fonction extérieure de classe  $H^p$  toute fonction  $F$  définie comme (cf. par exemple [25, §2.4]) :

$$F(z) = e^{i\gamma} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \Psi(t) dt \right\},$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}$  et où  $\Psi$  est une fonction positive de  $L^p(\mathbb{T})$  et de logarithme intégrable. D'autre part, on appelle produit de Blaschke toute fonction  $B$  de la forme (cf. par exemple [25, §1.4])

$$B(z) = z^m \prod_n \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z},$$

où  $m$  est un entier naturel et où  $\sum_n (1 - |a_n|) < \infty$ . Par ailleurs, on appelle fonction intérieure toute fonction  $f \in H^\infty$  et telle que  $|f(e^{i\theta})| = 1$  p.p. sur  $\mathbb{T}$  (cf. par exemple [25, §2.4]). Toute

fonction intérieure admet une décomposition de la forme  $e^{i\gamma} B(z) S(z)$  où  $B(z)$  est un produit de Blaschke et  $S(z)$  est une fonction de la forme

$$S(z) = \exp \left\{ - \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \right\},$$

avec  $\mu$  une fonction bornée non décroissante vérifiant  $\mu'(t) = 0$  p.p. Une telle fonction intérieure  $S$  est dite singulière.

Finalement, on rappelle que toute fonction  $f$  non nulle de classe  $H^p$ , pour  $p > 0$ , admet une unique factorisation canonique de la forme  $f(z) = B(z) S(z) F(z)$ , où  $B(z)$  est un produit de Blaschke,  $S(z)$  est une fonction intérieure singulière et  $F(z)$  est une fonction extérieure de classe  $H^p$  (avec  $\Psi(t) = |f(e^{it})|$ ). Réciproquement, tout produit de cette sorte est dans  $H^p$  [25, thm.2.8].

Rappelons que toute fonction  $f$ , appartenant à  $H^p$  pour  $0 < p \leq \infty$ , admet une limite non tangentielle  $f^*$  dans l'espace  $L^p(\mathbb{T})$  avec  $\|f\|_{H^p} = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})}$ . Nous dirons que les traces (les limites radiales) ou les restrictions sur le cercle unité  $\mathbb{T}$  des fonctions de  $H^p$  sont des fonctions de  $L^p(\mathbb{T})$ . Réciproquement, la fonction  $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ , pour  $1 \leq p \leq \infty$ , est trace d'une fonction  $f \in H^p$  si son intégrale de Poisson

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta}) P_r(t - \theta) dt, \quad \text{avec} \quad P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2},$$

est analytique dans le disque unité. De plus  $\|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^p}$ . Ceci permet de considérer les espaces de Hardy  $H^p$ , pour  $1 < p \leq \infty$ , comme des sous-espaces, par ailleurs fermés, de  $L^p(\mathbb{T})$  constitués des fonctions de  $L^p(\mathbb{T})$  dont les coefficients de Fourier d'indices négatifs sont tous nuls. Ainsi, on a par exemple

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \text{ avec } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}; \quad H^2 = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \text{ avec } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$$

Lorsque  $p = 1$  et si  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  désigne l'espace des mesures complexes sur  $\mathbb{T}$ , alors l'espace  $H^1$  peut être identifié, par le théorème de F. et M. Riesz (voir [46, chap.VII.A]), avec le sous-espace fermé et faiblement compact de  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  constitué des mesures absolument continues sur  $\mathbb{T}$  et dont la densité est dans  $H^1$ . (voir [29, The.3.6]).

$$L^1(\mathbb{T}) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \text{ avec } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty \right\}; \quad H^1 = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \text{ avec } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty \right\}$$

On rappelle que, pour  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , les inclusions suivantes sont vérifiées :

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset H^1 \quad \text{et} \quad L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}).$$

Soulignons que l'espace  $L^2(\mathbb{T})$  (resp.  $H^2$ ) muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$  défini par

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{T}) \text{ (resp. } H^2), \quad \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta,$$

est en fait un espace de Hilbert. Dans les espaces  $L^2(\mathbb{T})$  et  $H^2$ , l'égalité de Parseval s'écrit

$$\left\langle \sum_k a_k z^k, \sum_k b_k z^k \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_k a_k \overline{b_k}.$$



Sur le demi-plan droit, on définit, de la même façon que les espaces  $H^p$ , les espaces de Hardy  $H^p(\Pi^+)$ . En effet, si  $f$  est une fonction définie sur  $\Pi^+$ , on définit les moyennes intégrales

$$M_p(x, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p dy \right\}^{1/p} \quad \text{pour } 0 < p < \infty,$$

et

$$M_{\infty}(x, f) = \max_{-\infty < y < \infty} |f(x + iy)|.$$

Une fonction  $f$ , analytique dans  $\Pi^+$ , appartient à l'espace de Hardy  $H^p(\Pi^+)$ , pour  $0 < p \leq \infty$ , si la quantité  $M_p(x, f)$  reste bornée pour tout  $x > 0$ . Dans ces espaces  $H^p(\Pi^+)$ , les transformées de Fourier jouent le même rôle que celui des séries de Fourier dans  $H^p$ . La transformation conforme, précédemment introduite au chapitre I, qui envoie le demi-plan droit sur le disque unité permet de donner la forme équivalente suivante  $P_x(t) = \frac{1}{x^2 + t^2}$  du noyau de Poisson dans le demi-plan  $\Pi^+$ . Grâce à la transformation de Möbius, on définit, dans le demi-plan de droite  $\Pi_+$ , l'espace de Hardy  $H^{\infty}(\Pi^+)$  des fonctions analytiques et bornées dans  $\Pi_+$  et l'algèbre  $\mathcal{A}(\Pi_+)$  des fonctions de  $H^{\infty}(\Pi^+)$  qui admettent un prolongement continu sur l'axe achevé imaginaire  $i\mathbb{R}$ .

Pour faciliter la lecture de cette thèse, nous avons jugé utile de rappeler ici, en vrac, les propriétés des espaces de Hardy et de Lebesgue auxquelles nous nous référerons dans la suite.

## Quelques propriétés géométriques des espaces de Lebesgue et de Hardy

### Proposition II.1 [13, Part3-ch.I, §1]

Les espaces  $L^p(K)$ , pour  $1 < p < \infty$  et  $K \subset \mathbb{T}$ , sont strictement convexe.

### Proposition II.2 [13, Part2-Chap.1-prop.1-2]

Soit  $C$  un sous-ensemble convexe et fermé d'un espace de Hilbert  $H$ . Il existe une projection  $P$ , meilleure approximation de  $H$  dans  $C$ , donnée par :

$$\forall x \in H, \quad \exists! y \in C : \quad y = Px \quad \text{et} \quad \|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|,$$

ou, d'une manière équivalente, par

$$\forall x \in H, \quad \exists! y \in C : \quad y = Px \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C.$$

### Théorème II.1 (Théorème de Banach-Alaoglu [16, Theo.III.15])

Dans le dual de tout espace de Banach la boule unité est faiblement compacte.

### Lemme II.1 [13, Part-2-Chap-III]

Dans un espace réflexif, tout sous-espace fermé est réflexif. Par ailleurs, le dual d'un espace réflexif est réflexif.

### Lemme II.2 [13, Part-2-Chap-II]

Pour  $1 < p < \infty$ , les espaces  $L^p(\mathbb{T})$  sont réflexifs. Les espaces  $H^p$ , considérés comme des sous-espaces fermés de  $L^p(\mathbb{T})$  sont aussi réflexifs. Les espaces  $L^1(\mathbb{T})$  et  $L^{\infty}(\mathbb{T})$  ne sont pas réflexifs.

### Proposition II.3 [13, Part-3-Chap.II-§1-Prop.8]

Les espaces  $L^p(K)$ , pour  $1 < p < \infty$  et  $K \subset \mathbb{T}$ , sont uniformément convexe.

### Proposition II.4 [13, Part-3-Chap.II-§1-Prop.5]

Si  $E$  est un espace uniformément convexe, il existe une projection meilleure approximation sur tout sous-ensemble convexe et fermé de  $E$ .

## Quelques propriétés analytiques dans les espaces de Hardy

**Lemme II.3** [29, Chap.II-Cor.4.2]

Soit  $f \in H^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $f$  s'annule sur un sous-ensemble de  $\mathbb{T}$  de mesure positive alors  $f \equiv 0$ .

**Proposition II.5** (Les problèmes extrémaux pour  $1 \leq p < \infty$  [29, Chap.IV])

Soient  $1 \leq p < \infty$  et  $q$  son indice conjugué. Soit  $H_0^q = \{g \in H^q : g(0) = 0\}$ . Alors, la distance à  $H^p$  de toute fonction  $f \in L^p(\mathbb{T}) \setminus H^p$  est donnée par :

$$\text{dist}(f, H^p) = \inf_{g \in H^p} \|f - g\|_{H^p} = \sup_{\substack{F \in H_0^q \\ \|F\|_{H^q} \leq 1}} \left| \int_{\mathbb{T}} f F \frac{d\theta}{2\pi} \right|.$$

Il existe une unique fonction  $g \in H^p$  et une unique fonction  $F \in H_0^q$  telles que

$$\|F\|_{H^q} = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}} f F \frac{d\theta}{2\pi} = \text{dist}(f, H^p) = \|f - g\|_{H^p}.$$

**Proposition II.6** (Les problèmes extrémaux pour  $p = \infty$  [29, Chap.IV])

Si  $f \in H^\infty$ , alors la distance de  $f$  à  $H^\infty$  est donnée par :

$$\text{dist}(f, H^\infty) = \inf_{g \in H^\infty} \|f - g\|_{H^\infty} = \sup_{\substack{F \in H_0^1 \\ \|F\|_{H^1} \leq 1}} \left| \int_{\mathbb{T}} f F \frac{d\theta}{2\pi} \right|, \quad \text{où} \quad H_0^1 = \{g \in H^1 : g(0) = 0\}.$$

Il existe une fonction  $g \in H^\infty$ , non nécessairement unique, telle que :

$$\text{dist}(f, H^\infty) = \|f - g\|_{H^\infty}.$$

De plus, s'il existe une fonction  $F \in H_0^1$ ,  $\|F\|_{H_0^1} \leq 1$  telle que

$$\text{dist}(f, H^\infty) = \int_{\mathbb{T}} f F \frac{d\theta}{2\pi},$$

alors la meilleure approximation  $g \in H^\infty$  est unique et

$$|f - g| = \text{dist}(f, H^\infty) \quad \text{p.p.}$$

**Théorème II.2** [29, IV, thm.1.7]

Si la fonction  $f \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ , il existe une fonction  $F \in H_0^1$ , avec  $\|F\|_{H^1} = 1$  telle que :

$$\int_{\mathbb{T}} f F \frac{d\theta}{2\pi} = \text{dist}(f, H^\infty)$$

et il existe une unique fonction  $g \in H^\infty$  telle que

$$\|f - g\|_{H^\infty} = \text{dist}(f, H^\infty).$$

**Théorème II.3** [29, IV, thm.2.1, thm.2.2]

Si la fonction  $f(\theta)$  est Dini continue, c'est à dire si le module de continuité  $\omega_f$  de  $f$  vérifie

$$\int_0^\varepsilon \frac{\omega_f(t)}{t} dt < \infty,$$

pour un réel  $\varepsilon > 0$ , alors la meilleure approximation  $g \in H^\infty$  de  $f$  est continue sur  $\mathbb{T}$ . De plus cette condition ne peut être relaxée. En effet, si  $\omega(t)$  est une fonction continue et non décroissante nulle en zéro ( $\omega(0) = 0$ ) et sous additive ( $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$ ) avec  $\int_0^\infty \omega(t)/t dt = \infty$ , alors il existe une fonction  $f(\theta) \in C(\mathbb{T})$  telle que  $\omega_f(\delta) \leq \omega(\delta)$  et telle que la meilleure approximation de  $f$  dans  $H^\infty$  soit discontinue sur  $\mathbb{T}$ .

**Théorème II.4** (Théorème de Runge [70, Thm.13.6])

Soit  $K$  un compact du plan et  $\{\alpha_j\}$  un ensemble qui contient un point dans chaque composante de  $S^2 - K$  où  $S^2$  est la sphère de Riemann. Si  $\Omega$  est un ouvert contenant  $K$  alors pour toute fonction  $f$  analytique dans  $\Omega$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une fonction rationnelle  $R$ , dont tous les pôles sont dans l'ensemble  $\{\alpha_j\}$ , telle que

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon, \quad \forall z \in K.$$

**Théorème II.5** (Théorème de Mergelyan [70, theo.20.5])

Soit  $K$  un espace compact du plan complexe dont le complémentaire est connexe. Soit  $f$  une fonction continue et à valeurs complexes sur  $K$ , holomorphe sur l'intérieur de  $K$  et soit  $\epsilon > 0$ . Il existe un polynôme  $P$  tel que

$$|f(z) - P(z)| < \epsilon, \quad \forall z \in K.$$

**Théorème II.6** (Théorème d'extension de Tietze-Urysohn [70, Theo.20.4])

Soit  $K$  un sous-ensemble compact d'un espace localement compact et séparé  $X$ . Soit  $f \in C(K)$ . Il existe une fonction  $F \in C_c(X)$  telle que  $F(x) = f(x)$  pour tout  $x \in K$ .

**II-2 Quelques résultats de densité dans  $L^p(K)$** 

Dans les espaces de Hardy  $H^p$ , considérés comme des sous-espaces fermés dans les espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{T})$ , la distance à  $H^p$  de toute fonction  $f$  de  $L^p(\mathbb{T})$  est, par la proposition II.2, positive à moins que  $f$  ne soit déjà la trace sur le cercle unité  $\mathbb{T}$  d'une fonction de  $H^p$ . Sur un sous-arc strict  $K$  du cercle unité  $\mathbb{T}$ , cette propriété s'énonce pour  $1 \leq p < \infty$  en terme de densité et le cas  $p = \infty$  présente quelques particularités dues au fait que la norme  $\infty$  découple les comportements sur  $K$  et sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

Dans le reste de ce chapitre,  $\lambda$  et  $\mathbb{T} \setminus K$  désigneront respectivement la mesure de Lebesgue et le complémentaire de l'ensemble  $K$  dans cercle unité  $\mathbb{T}$ .

Rappelons par les théorèmes 1 et 2 suivants, les résultats dus à Baratchart et al. :

**Théorème 1** [10, Thm.1]

Soit  $K$  un sous-ensemble du cercle unité  $\mathbb{T}$  tel que  $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$ . Soit  $1 \leq p < \infty$ . Alors l'ensemble  $H_{|K}^p$  des restrictions sur  $K$  des fonctions de  $H^p$  est dense dans  $L^p(K)$ . De plus, si  $\lambda(K) > 0$ , alors  $H_{|K}^p \neq L^p(K)$ .

La démonstration de ce théorème contient un certain nombre de mécanismes de base des espaces de Hardy qu'il est intéressant de reprendre. Nous re-formulons ici avec quelques modifications la démonstration des auteurs.

**Démonstration du théorème 1 :**

Supposons qu'il existe une fonction non nulle  $f$  de  $L^p(K)$  qui ne soit la limite dans  $L^p(K)$  d'aucune suite de fonctions de  $H_{|K}^p$  c'est-à-dire telle que  $\text{dist}(f, H_{|K}^p) > 0$ . Alors, si  $f \vee 0$  désigne la concaténation des fonctions  $f$  et 0, la distance  $\text{dist}(f \vee 0, H^p)$  à  $H^p$  de  $f \vee 0$  est nécessairement positive. Nous en déduisons par la formulation duale du problème extrémal que (cf. propositions II.5 et II.6), si  $q$  est l'indice conjugué de  $p$ , alors, pour toute fonction  $g$  de  $H^q$

$$\int_{\mathbb{T}} (f \vee 0) g \, d\lambda = 0$$

Par un raisonnement analogue à celui mené dans la section [25, §7.2] sur la représentation des fonctionnelles linéaires dans les espaces  $L^p(\mathbb{T})$  basée sur le théorème de la représentation de Riesz, nous en déduisons que  $f \vee 0 \in H^p$ . Nulle sur l'ensemble  $\mathbb{T} \setminus K$  de mesure de Lebesgue positive,

la fonction  $f \vee 0$  de  $H^p$  est, par le lemme II.3, identiquement nulle sur tout  $\mathbb{T}$ ; ceci contredit l'hypothèse sur  $f$  supposée non identiquement nulle sur  $K$ .

Par ailleurs, l'espace métrique  $K$  est un espace localement compact séparé. Puisque l'ensemble  $K$  est de mesure de Lebesgue  $\lambda(K)$  positive, il existe deux sous-ensembles  $K_1$  et  $K_2$  disjoints et fermés dans  $K$  et de mesures  $\lambda(K_1)$  et  $\lambda(K_2)$  positives. Par le théorème II.6 d'extension de Tietze-Urysohn, la fonction définie sur le compact  $K_1 \cup K_2$  et identiquement égale à 1 sur  $K_1$  et à 0 sur  $K_2$ , admet une extension continue  $f$  sur  $K$ . Par le lemme II.3, cette fonction  $f$  nulle sur l'ensemble  $K_2$  de mesure  $\lambda(K_2)$  positive sans être identiquement nulle sur tout  $K$ , n'est forcément dans aucun des espaces  $H^p$ . Ainsi, la fonction continue  $f$  élément de  $L^p(K)$  n'appartient à aucun des espaces  $H^p_{|K}$  pour les valeurs de  $p$  dans  $[1, \infty[$ . Ceci achève la démonstration du théorème.  $\square$

**Théorème 2** [10, Thm.1-2], [2, Thm.1-2, Prop.1, Coro.1]

Soit  $K$  un sous-ensemble du cercle unité  $\mathbb{T}$ . Soit  $H^\infty_{|K}$  (resp.  $\mathcal{A}_{|K}$ ) l'ensemble des restrictions sur  $K$  des fonctions de  $H^\infty$  (resp.  $\mathcal{A}_{|K}$ ). Alors :

1. Si  $\lambda(K) > 0$ ,  $H^\infty_{|K}$  n'est pas dense dans  $L^\infty(K)$ . De plus, si  $K$  est ouvert, la fermeture de  $H^\infty_{|K}$  dans  $L^\infty(K)$  est contenue dans  $H^\infty_{|K} + C(K)$  et si  $K$  est un sous-ensemble propre et fermé de  $\mathbb{T}$ , la fermeture de  $H^\infty_{|K}$  dans  $L^\infty(K)$  contient  $(H^\infty + C(\mathbb{T}))_{|K}$ .
2. Si  $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$  et  $K$  est fermé alors  $\mathcal{A}_{|K}$  est dense dans l'ensemble  $C(K)$  des fonctions continues sur  $K$ . Si  $\lambda(K) > 0$  alors  $\mathcal{A}_{|K} \neq C(K)$ .

#### Démonstration du théorème 2 :

L'existence de fonctions continues mal-approximables dans  $H^\infty$  (voir [29, Chap. Exe.4]) peut expliquer la non-densité de l'ensemble  $H^\infty_{|K}$  dans l'espace  $L^\infty(K)$ . Dans leur article [10], les auteurs en donne une preuve basée sur le fait que si l'ensemble des zéros d'un produit de Blaschke  $b$  possède un point d'accumulation non-tangentiel de densité dans  $K$  alors la fonction  $\bar{b}_{|K}$  de  $L^\infty(K)$  est mal-approximable dans  $H^\infty_{|K}$ . La démonstration de la seconde partie de 1 est plus technique. Évoquons simplement qu'elle repose sur le théorème de Chang–Marshall [29, IX, thm 3.1] concernant la représentation des sous-algèbres de  $L^\infty(\mathbb{T})$  contenant  $H^\infty$  et sur la continuité à travers un arc du facteur intérieur de toute fonction de  $H^p$  dont la partie réelle est non négative sur cet arc. La dernière partie de 1 découle du résultat 2 du théorème.

La démonstration du résultat 2 est une conséquence du théorème II.5 de Mergelyan. En effet, lorsqu'il est fermé, l'ensemble  $K$  est un compact du plan complexe dont le complémentaire est connexe de sorte que toute fonction de l'ensemble  $\mathcal{A}_{|K}$  vérifie les hypothèses du théorème et admet donc une approximation polynomiale arbitrairement proche sur  $K$ . Finalement, remarquons que la démonstration de la seconde partie du théorème 1 est aussi une preuve du dernier résultat de ce théorème 2.  $\square$

## II-3 Approximation dans $H^p$ des fonctions de $L^p(K)$

Étant donnée une fonction  $f$  de  $L^p(K)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , avec  $K$  et  $\mathbb{T} \setminus K$  de mesures positives, l'approximation dans  $H^p$  de cette fonction  $f$  consiste à trouver une famille  $(g_\rho)_{\rho>0}$  de fonctions de  $H^p$  telle que :

1. la famille  $(g_\rho)_{\rho>0}$  des restrictions sur  $K$  converge vers  $f$  dans  $L^p(K)$  quand  $\rho$  tend vers l'infini ;
2. cette famille  $(g_\rho)_{\rho>0}$  converge dans  $H^p$  quand  $\rho$  tend vers l'infini si  $f$  est la trace d'une fonction de  $H^p_{|K}$ .

Remarquons que, lorsque  $1 \leq p < \infty$ , le théorème 1 garantit l'existence d'une telle famille approximante. Dans cette section, nous présenterons quelques procédures permettant la construction de telles familles, mais commençons d'abord par caractériser les traces sur  $K$  des fonctions de  $H^p$ .

**Proposition 1** [10, Prop.3] *Soit  $K$  un sous-ensemble de  $\mathbb{T}$  tel que  $\lambda(K) > 0$ . Soit  $f$  une fonction de  $L^p(K)$  pour  $1 \leq p \leq \infty$ .*

*Pour toute suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $H^p$  dont la restriction  $(g_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $K$  converge vers  $f$  dans  $L^p(K)$ , si  $f$  n'est pas la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^p$ , alors :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{L^p(\mathbb{T} \setminus K)} = \infty.$$

#### Démonstration de la proposition 1 :

Supposons au contraire qu'il existe une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions bornées de  $H^p$  qui converge vers  $f$  dans  $L^p(K)$ . Étudions d'abord le cas où  $1 < p < \infty$ . Dans l'espace de Banach  $L^p(K)$ , il existe, par le théorème de Banach-Alaoglu (voir théorème II.1), une sous-suite notée encore  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement vers une fonction  $g$  de  $H^p$ . Il en résulte, compte tenu de l'hypothèse de la convergence de la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  dans  $L^p(K)$ , que  $f = g$  presque partout sur  $K$  c'est-à-dire que  $f \in H^p|_K$  par le lemme II.3. Lorsque  $p = \infty$ , le théorème de Banach-Alaoglu permet d'extraire de la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge au sens faible-\* vers une fonction  $g$  de  $L^\infty(\mathbb{T})$ . Puisque  $H^\infty$  est fermé au sens faible-\* dans  $L^\infty(\mathbb{T})$ , alors  $g \in H^\infty$ , ce qui entraîne comme dans le cas  $1 < p < \infty$  précédent que  $f \in H^\infty|_K$ . Finalement, puisque  $H^1$  est un sous-ensemble fermé au sens faible-\* dans  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ , alors un raisonnement analogue à celui du cas  $p = \infty$  permet de conclure.  $\square$

Nous allons reprendre quelques résultats de [60, 68, 78] qui peuvent être utilisés pour obtenir des procédés constructifs pour les familles approximantes  $(g_\rho)_{\rho > 0}$  et permettent de caractériser les traces sur  $K$  des fonctions de  $H^p$ .

Soit  $\chi_K$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $K$  et soit  $P_{H^p}$  la projection naturelle de  $L^p(\mathbb{T})$  dans  $H^p$  pour  $1 < p < \infty$ . Soit  $h_\rho$  la fonction extérieure de  $H^\infty$  définie pour tout  $\rho \in ]0, \infty[$  par (voir [60, thm.1]) :

$$h_\rho(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \log(1 + \rho) \int_K \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right\}. \quad (13)$$

Pour tout  $p \in ]1, \infty[$ , on définit l'application  $T_\rho(g)$  (voir [10, équ. (1)]) :

$$\begin{aligned} T_\rho(g) : L^p(K) &\rightarrow H^p \\ g &\mapsto \rho h_\rho P_{H^p}(\chi_K g \bar{h}_\rho) \end{aligned} \quad (14)$$

Le théorème suivant, généralisation à  $L^p(K)$  d'un résultat analogue de Patil [60, theo.1-2] dans  $H^p|_K$ , donne une version constructive du théorème 1 :

#### Théorème 3 [10, Prop. 1]

*Soit  $K$  un sous-ensemble de  $\mathbb{T}$  tel que  $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$  et soit  $1 < p < \infty$ . Pour toute fonction  $f$  de  $L^p(K)$ , la famille  $(T_\rho(f))_{\rho > 0}$  de fonctions de  $H^p$  converge vers  $f$  dans  $L^p(K)$  quand  $\rho$  tend vers l'infini. De plus,  $f$  est la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^p$  si et seulement si la norme de  $T_\rho(f)$  reste bornée dans  $L^p(\mathbb{T} \setminus K)$ .*

Notons que, dans sa démonstration [60, Theo. 1], Patil montre que, pour  $1 < p < \infty$ , si  $S$  est l'opérateur de Toeplitz associé au symbole  $\chi_K$  et défini sur  $H^p$  par :

$$\begin{aligned} S : H^p &\rightarrow H^p \\ g &\mapsto P_{H^p}(\chi_K g) \end{aligned}$$

et si de plus  $f \in H^p_{|K}$ , alors la famille de fonctions  $(\rho(I + \rho S)^{-1} S f)_{\rho > 0}$  de  $H^p$  converge vers  $f$  dans  $L^p(K)$  quand  $\rho$  tend vers l'infini. Dans III-4, nous constaterons le lien entre cette famille et la solution du problème de la complétion analytique bornée dans  $H^2$ .

Lorsque  $p = 2$ , une procédure plus élaborée est donnée par Rosenblum et Rovnyak dans [68] pour reconstruire une fonction de l'espace de Hardy  $H^2$  du demi-plan à partir de ses valeurs sur un sous-ensemble de Borel de l'axe réel. Ce résultat est une généralisation du travail de van Winter [78] sur la reconstruction d'une fonction de  $H^2$  donnée initialement sur un demi-axe.

Baratchart et *al.* donnent, dans [10], une re-formulation de ce résultat sur un sous-ensemble du cercle unité et sur son utilisation à une procédure d'approximation d'une fonction quelconque de  $L^2(K)$  par une fonction de  $H^2_{|K}$ . Soit  $K \subset \mathbb{T}$  telles que les mesures  $\lambda(K)$  et  $\lambda(\mathbb{T} \setminus K)$  soient positives. Soit  $\gamma$  la fonction à valeurs complexes définie par :

$$\gamma(z) = \begin{cases} -\exp \left\{ \frac{1}{2i} \int_K \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right\} & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T} \\ \lim_{r \rightarrow 1+} \left( -\exp \left\{ \frac{1}{2i} \int_K \frac{r e^{it} + z}{r e^{it} - z} dt \right\} \right) & z = e^{i\theta} \in \mathbb{T} \end{cases} \quad (15)$$

Pour tout  $\rho$  positif, considérons la partition suivante de  $K$  :

$$K = K_{\rho+} \cup K_{\rho-} \quad \text{avec} \quad K_{\rho+} = \{e^{i\theta} \in K; \gamma(e^{i\theta}) > \rho\} \text{ et } K_{\rho-} = \{e^{i\theta} \in K; \gamma(e^{i\theta}) \leq \rho\}.$$

Le lemme suivant reprend le résultat [68, thm.2] re-formulé dans [10, ass.(a)-(b)] sur le cercle unité.

**Lemme 1** Si  $F \in L^2(\mathbb{T})$  et  $e^{\pi\gamma} F \in L^2(\mathbb{T})$ , alors la fonction  $S(F)$  définie par :

$$S(F)(z) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\gamma(e^{it}) - \gamma(z)}{e^{it} - z} \gamma(z)^{-1/2 - i\gamma(e^{it})} F(e^{it}) e^{it} dt \quad (16)$$

est un élément de  $H^2$ . De plus :

$$\|S(F)\|_{L^2(K)} = \|F\|_{L^2(\mathbb{T})} \quad \text{et} \quad \|S(F)\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = \|e^{\pi\gamma} F\|_{L^2(\mathbb{T})}. \quad (17)$$

Inversement si pour toute fonction  $f \in L^2(K)$ ,  $R(f)$  désigne l'extension de  $f$  sur tout  $\mathbb{T}$  définie en  $e^{i\theta}$  par :

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left( \lim_{r \rightarrow 1-} \int_{K_{1+}} \left( \frac{\gamma(e^{it}) - \gamma(re^{i\theta})}{e^{it} - re^{i\theta}} \gamma(e^{it})^{-1/2 + i\gamma(re^{i\theta})} f(e^{it}) e^{it} \right) dt + \lim_{r \rightarrow 1+} \int_{K_{1-}} \right) \quad (18)$$

alors  $e^{\pi\gamma} R(f) \in L^2(\mathbb{T})$  si et seulement si  $f \in H^2_{|K}$ , et dans ce cas  $f = S(R(f))$  où  $S$  est définie par (16).

Ce lemme permet d'obtenir la procédure constructive d'approximation suivante :

**Proposition 2** [10, Pro.2] Soit  $K$  un sous-ensemble du cercle unité  $\mathbb{T}$  tel que  $\lambda(K) > 0$  et  $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$ . Pour toute fonction  $f \in L^2(K)$  et pour tout réel  $\rho > 0$ , définissons la fonction  $S_\rho(f)$  de  $H^2$  par :

$$S_\rho(f) = S(\chi_{\mathbb{T} \setminus K_{\rho+}} R(f)). \quad (19)$$

Alors la famille  $(S_\rho(f)|_K)_{\rho > 0}$  converge vers  $f$  dans  $L^2(K)$  quand  $\rho$  tend vers l'infini. Si de plus  $f$  est égale à la restriction sur  $K$  d'une fonction  $g$  de  $H^2$ , alors  $S_\rho(f)$  converge vers  $g$  dans  $H^2$ .



## Chapitre III

# Le problème extrémal borné

Dans les espaces de Hardy  $H^p$  du disque unité  $\mathbb{D}$  pour  $1 \leq p \leq \infty$ , le problème extrémal borné que nous allons présenter ici peut être considéré comme une généralisation au cas d'un sous-ensemble  $K$  du cercle unité  $\mathbb{T}$  du problème extrémal classique dont il étend l'utilisation en l'identification harmonique partielle sur la bande de fréquence  $K$ . Pour  $p = \infty$  par exemple, le problème extrémal borné joue en identification fréquentielle partielle robuste le même rôle que le problème d'extension de Nehari en identification robuste sur tout le cercle.

Étant donnée une fonction  $f$  de  $L^p(K)$  pour  $p \geq 1$ , ce problème extrémal borné consiste à trouver une fonction  $g$  de  $H^p$  qui soit la plus proche possible de  $f$  sur  $K$  et dont la distance à une fonction donnée de référence  $h \in L^p(\mathbb{T} \setminus K)$  est au plus égale, sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , à une tolérance (positive)  $M$  donnée. Plus précisément,

**Problème 1** Soit  $K$  un sous-ensemble de  $\mathbb{T}$  de mesure de Lebesgue positive et soit  $p$  tel que  $1 \leq p \leq \infty$ . Pour toute fonction  $h \in L^p(\mathbb{T} \setminus K)$  et pour tout réel positif  $M$ , on définit le sous-ensemble  $\mathcal{B}_{M,h}^p$  de  $H^p$  par :

$$\mathcal{B}_{M,h}^p = \{g \in H^p ; \|h - g\|_{L^p(\mathbb{T} \setminus K)} \leq M\} .$$

Soit  $f \in L^p(K)$ . Trouver une fonction  $\hat{g} \in \mathcal{B}_{M,h}^p$  telle que :

$$\|f - \hat{g}\|_{L^p(K)} = \inf_{g \in \mathcal{B}_{M,h}^p} \|f - g\|_{L^p(K)} . \quad (20)$$

Dans le cas particulier où  $K \equiv \mathbb{T}$ , la fonction  $h$  et la constante  $M$  n'interviennent plus, l'ensemble  $\mathcal{B}_{M,h}^p$  s'étend à tout l'espace  $H^p$  et l'équation (20) se réduit à un problème extrémal (dual) classique. Rappelons (voir propositions II.5 et II.6) que le problème extrémal admet toujours une solution et que cette dernière est unique pour  $1 \leq p < \infty$ .

Lorsque  $K \neq \mathbb{T}$  et à moins que  $f$  ne soit déjà la trace sur  $K$  d'une fonction de Hardy, la proposition 1 implique que la contrainte sur  $\mathbb{T} \setminus K$  est nécessaire pour rendre ce problème de minimisation bien posé.

Ce problème extrémal borné dans  $H^p$  a été étudié par Baratchart et *al.* dans [10, 3]. Nous allons rappeler leurs résultats qui contiennent une caractérisation de la solution  $\hat{g}$  pour  $p = \infty$  et  $p = 2$  et que nous présenterons, complétée de quelques schémas dichotomiques pour le calcul effectif de  $\hat{g}$ , respectivement en §III-2 et §III-3.

Dans cette étude, nous constaterons l'importance du choix de la fonction  $h$ . La recherche d'une valeur optimale de ce paramètre a été posée sous la forme d'un problème de complétion analytique bornée dans  $H^p$  par Baratchart et *al.* dans [12] : étant donnée une fonction  $f \in L^p(\mathbb{T} \setminus K)$ , avec



$1 \leq p \leq \infty$ , ce problème consiste à trouver la meilleure extension  $\tilde{h}$  de  $f$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  au sens où la fonction  $f \vee \tilde{h}$  ainsi complétée devient la plus proche possible de l'espace  $H^p$ . Plus précisément :

**Problème 2** Soient  $K$  un sous-ensemble strict de  $\mathbb{T}$  et  $p$  tel que  $1 \leq p \leq \infty$ . Soient  $f$  une fonction de  $L^p(K)$  et  $C$  une constante positive. Définissons l'ensemble  $\mathcal{F}_C^p$  de  $L^p(\mathbb{T} \setminus K)$  par :

$$\mathcal{F}_C^p = \{h \in L^p(\mathbb{T} \setminus K), \|h\|_{L^p(\mathbb{T} \setminus K)} \leq C\}.$$

Trouver une fonction  $\tilde{h} \in \mathcal{F}_C^p$  telle que :

$$\text{dist}(f \vee \tilde{h}, H^p) = \min_{h \in \mathcal{F}_C^p} \text{dist}(f \vee h, H^p). \quad (21)$$

Comme pour le problème extrémal sur  $K$ , remarquons que la présence d'une contrainte sur la norme de la meilleure complétion sur  $\mathbb{T} \setminus K$  est nécessaire pour rendre le problème de la meilleure complétion analytique bien posé à moins que  $f$  ne soit déjà la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^p$ . En effet, si  $f \notin H_{|K}^p$  et si  $(h_n)_{n \geq 1}$  est une suite de fonctions de  $H^p$  qui converge vers  $f$  sur  $K$ , alors :

$$\text{dist}(f \vee h_n|_{\mathbb{T} \setminus K}, H^p) \leq \|f \vee h_n|_{\mathbb{T} \setminus K} - h_n\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f - h_n|_K\|_{L^p(K)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

de sorte que, par la proposition 1, on a :

$$\|h_n|_{\mathbb{T} \setminus K}\|_{L^p(\mathbb{T} \setminus K)} \longrightarrow \infty \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Dans [12], les auteurs donnent, pour  $p = 2$ , une caractérisation de la meilleure complétion analytique borné ainsi que le lien entre les problèmes extrémaux bornés et les problèmes de complétion analytique bornée. Ces deux résultats feront respectivement l'objet des sections §III-4 et §III-5. Soulignons que le problème de la complétion analytique bornée dans  $H^\infty$  a été récemment résolu [9].

Rappelons que l'intérêt particulier porté aux valeurs  $p = 2$  et  $p = \infty$ , se justifie par le fait qu'en automatique, le cas  $p = 2$  correspond, dans le contexte stochastique classique, à une identification paramétrique au minimum de variance lorsque l'entrée est un bruit blanc et le cas  $p = \infty$  quant à lui correspond à la minimisation de l'erreur de la transmission d'énergie.

### III-1 Le problème extrémal borné

Soit  $(\mathcal{B}_{M,h}^p)_{|K}$  l'ensemble des restrictions sur  $K$  des fonctions de  $\mathcal{B}_{M,h}^p$  :

$$(\mathcal{B}_{M,h}^p)_{|K} = \{g|_K, g \in \mathcal{B}_{M,h}^p\},$$

alors nous avons le résultat suivant :

**Théorème 4** [10, Thm.4] et [2, Thm.3].

Supposons que  $f \notin (\mathcal{B}_{M,h}^p)_{|K}$  et que  $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$ .

1. si  $p < \infty$ , le problème extrémal borné (20) admet une unique solution  $\hat{g}$ . De plus  $\hat{g}$  vérifie :

$$\|h - \hat{g}\|_{L^p(\mathbb{T} \setminus K)} = M. \quad (22)$$

2. si  $p = \infty$ , une solution  $\hat{g}$  existe pourvu que l'ensemble  $\mathcal{B}_{M,h}^p$  soit non vide. Cette solution n'est pas forcément unique et ne sature pas nécessairement la contrainte (22). Cependant si  $f$  appartient à la fermeture de  $H_{|K}^\infty$  dans  $L^\infty(K)$ , toute solution  $\hat{g}$  satisfait (22). Si la concaténation  $f \vee h$  appartient à  $H^\infty + C(\mathbb{T})$  alors la solution  $\hat{g}$  est unique.

Sans reprendre entièrement la démonstration de [10], indiquons simplement quelques éléments de leur preuve que nous détaillerons par ailleurs plus loin pour  $p = 2$  et  $p = \infty$ .

D'abord, définissons pour  $1 \leq p \leq \infty$ , l'application  $\Psi_p$  suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_p : L^p(K) &\longrightarrow [0, \infty[ \\ g &\longmapsto \|f - g\|_{L^p(K)}. \end{aligned}$$

Lorsque  $1 < p < \infty$ , l'existence et l'unicité de la solution proviennent de la proposition II.4 garantissant l'existence d'une meilleure projection de l'espace convexe  $L^p(K)$  (cf. proposition II.3) sur le sous-ensemble convexe et fermé  $\left(\mathcal{B}_{M,h}^p\right)_{|K}$ . L'existence de  $\hat{g}$  pour  $p = 1$  et  $p = \infty$  découle du fait que sur l'ensemble  $\left(\mathcal{B}_{M,h}^p\right)_{|K}$  fermé au sens faible-\*, l'application  $\Psi_p$  atteint son minimum.

Par ailleurs supposons que l'application  $\Psi_p$  atteint son minimum en  $\hat{g}$  à l'intérieur de  $\left(\mathcal{B}_{M,h}^p\right)_{|K}$ , c'est-à-dire tel que  $\|h - \hat{g}\|_{L^p(\mathbb{T} \setminus K)} < M$ . Soit  $\mathcal{R} : H^p \longrightarrow L^p(K)$  la restriction naturelle. Puisque l'application  $\Psi \mathcal{R}$  est convexe et admet un minimum local en  $\hat{g}$ , elle admet en ce point un minimum global. Compte tenu de la densité de  $H_{|K}^p$  dans  $L^p(K)$  pour  $1 \leq p < \infty$  (voir théorème 1) et de l'hypothèse  $f \in \overline{H_{|K}^\infty}$  si  $p = \infty$ , alors ce minimum global est nul et donc  $f = \hat{g}_{|K}$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale  $f \notin \left(\mathcal{B}_{M,h}^p\right)_{|K}$  sur  $f$ .

Ainsi si  $1 \leq p < \infty$  ou bien si  $f$  appartient à la fermeture de  $H_{|K}^\infty$  dans  $L^\infty(K)$ , toute solution  $\hat{g}$  sature la contrainte  $M$  c'est-à-dire vérifie (22). Ce résultat sur la saturation de la contrainte peut être devinée à partir de la proposition 1, puisque toute suite qui minimise l'écart en norme à la fonction  $f$  sur  $K$ , voit buter contre les frontières de  $\mathcal{B}_{M,h}^p$ , sa norme - ou celle de sa différence à une fonction  $h$  - qui a par ailleurs tendance à diverger si  $f \notin \left(\mathcal{B}_{M,h}^p\right)_{|K}$  (et  $f \notin \overline{H_{|K}^\infty}$  lorsque  $p = \infty$ ).

Nous allons montrer que lorsque  $p = \infty$  ou  $p = 2$ , nous disposons d'une solution explicite du problème extrémal borné.

## III-2 Le problème extrémal borné pour $p = \infty$

Pour toutes fonctions positives  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement de  $L^\infty(K)$  et de  $L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)$ , si leur concaténation  $\alpha \vee \beta$  est telle que  $\log(\alpha \vee \beta) \in L^1(\mathbb{T})$ , nous introduisons le facteur extérieur  $w_{\alpha \vee \beta} \in H^\infty$  par (cf. §II-1) :

$$w_{\alpha \vee \beta}(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log(\alpha \vee \beta(e^{i\theta})) d\theta \right\} \quad \forall z \in \mathbb{D}, \quad (23)$$

avec

$$|w_{\alpha \vee \beta}(z)| = \begin{cases} \alpha(z) & \text{p.p. sur } K, \\ \beta(z) & \text{p.p. sur } \mathbb{T} \setminus K \end{cases} \quad \text{et} \quad (\alpha \vee \beta)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T}) \implies w_{\alpha \vee \beta}^{-1} = w_{\frac{1}{\alpha} \vee \frac{1}{\beta}} \in H^\infty \quad (24)$$

Remarquons que, si  $\alpha_1 \vee \beta_1$  et  $\alpha_2 \vee \beta_2$  sont deux fonctions positives de  $L^\infty(\mathbb{T})$  dont les logarithmes sont intégrables sur  $\mathbb{T}$ , alors :

$$w_{\alpha_1 \alpha_2 \vee \beta_1 \beta_2} = w_{\alpha_1 \vee \beta_1} w_{\alpha_2 \vee \beta_2}.$$

Finalement, lorsque le problème extrémal borné (20) admet une solution  $\hat{g}$ , posons :

$$\beta_\infty = \|f - \hat{g}\|_{L^\infty(K)} = \inf_{g \in B_{M,h}^\infty} \|f - g\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)}. \quad (25)$$

Remarquons que  $\beta_\infty = 0$  si et seulement si  $f$  est la trace sur  $K$  de la fonction  $\hat{g} \in H^\infty$ . Nous allons montrer dans la sous-section suivante III-2.1 que, lorsque  $\beta_\infty > 0$ , le problème (25) est équivalent à un problème de Nehari pondéré par le facteur extérieur  $w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1}$ . Cette équivalence nous permettra ensuite dans la sous-section III-2.2 de donner une caractérisation de la solution  $\hat{g}$ .

### III-2.1 Équivalence avec un problème de Nehari

**Proposition 3** *Supposons que  $\beta_\infty > 0$ . Alors  $\hat{g}$  est solution du problème (25) si et seulement si  $\hat{v} = \hat{g} w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1}$  est solution du problème de Nehari (26) suivant :*

$$\min_{v \in H^\infty} \|(f \vee h) w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|(f \vee h) w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1} - \hat{v}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \quad \left( = M \right). \quad (26)$$

Si  $f \vee h \in H^\infty + C(\mathbb{T})$  alors la solution  $\hat{g}$  est unique; de plus

$$\begin{cases} |f - \hat{g}| = \beta_\infty & \text{sur } K \\ |h - \hat{g}| = M & \text{sur } \mathbb{T} \setminus K \end{cases} \quad \text{ou simplement} \quad |(f \vee h) w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1} - \hat{v}| = M \text{ sur } \mathbb{T}.$$

La démonstration de cette proposition repose sur le fait que la norme uniforme découple les comportements sur  $K$  et sur  $\mathbb{T} \setminus K$  puisque pour toute fonction  $v \in H^\infty$ , si  $g = v w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1}^{-1}$  alors :

$$\|(f \vee h) w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \max \left( \frac{M}{\beta_\infty} \|f - g\|_{L^\infty(K)}, \|h - g\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} \right). \quad (27)$$

Démontrons tout d'abord que nous avons nécessairement :

$$\min_{v \in H^\infty} \|(f \vee h) w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = M.$$

En effet si  $\hat{g}$  est une solution du problème (25) alors par (27), la fonction  $\hat{v} = \hat{g} w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1}$  vérifie :

$$\|(f \vee h) w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1} - \hat{v}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = M.$$

Par ailleurs, s'il existe une fonction  $\tilde{v} \in H^\infty$  telle que :

$$\|(f \vee h) w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1} - \tilde{v}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < M,$$

alors compte tenu de la relation (27), nous avons :

$$\|f - \tilde{v} w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1}^{-1}\|_{L^\infty(K)} < \beta_\infty \quad \text{et} \quad \|h - \tilde{v} w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1}^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} < M$$

ce qui contredit la définition (25) de  $\beta_\infty$ .

Nous venons en outre de démontrer que si  $\hat{g}$  est une solution du problème (25) alors  $\hat{v} = \hat{g} w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1}$  est une solution du problème (26). Réciproquement, si  $\hat{v}$  est une solution du problème (26) alors la fonction  $\hat{g} = \hat{v} w_{\frac{M}{\beta_\infty} \vee 1}^{-1}$  vérifie par (27) :

$$\|f - \hat{g}\|_{L^\infty(K)} \leq \beta_\infty \quad \text{et} \quad \|h - \hat{g}\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} \leq M$$

ce qui, compte tenu de la définition de  $\beta_\infty$ , implique que  $\hat{g}$  est une solution du problème (25).  $\square$

### III-2.2 Calcul de la solution du problème extrémal borné

A ce stade, et même si nous avons pu transformer notre problème extrémal borné (25) en un problème de Nehari (26) dont nous connaissons une solution explicite (voir §V-2.3), le problème (25) n'est pour autant pas entièrement résolu. En effet, la résolution effective du problème (26), implicite en  $\beta_\infty$ , exige de connaître la valeur de  $\beta_\infty$ , c'est-à-dire a priori de résoudre le problème initial (25). Lorsque  $f \vee h \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ , nous déterminerons cette valeur en considérant une famille de problèmes extrémaux (28) et nous montrerons que  $\beta_\infty$  est donnée par  $\beta_\infty = \frac{M}{\delta_0}$  où  $\delta_0$  est la valeur du paramètre  $\delta$  de cette famille, solution d'un problème implicite.

Plus précisément, supposons que  $f \vee h \in H^\infty + C(\mathbb{T})$  de sorte que :

$$\forall \delta > 0 : (f \vee h) w_{\delta \vee 1} \in H^\infty + C(\mathbb{T}).$$

Définissons alors l'application  $\Delta$  suivante par :

$$\begin{aligned} \Delta : ]0, \infty[ &\longrightarrow ]0, \infty[ \\ \delta &\longmapsto \min_{v \in H^\infty} \|(f \vee h) w_{\delta \vee 1} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Tout d'abord, une démonstration en tout point analogue à celle de la proposition 3 nous permet d'établir le résultat suivant :

**Lemme 2** Pour tout  $\delta > 0$ , la fonction  $g_\delta \in \mathcal{B}_{\Delta(\delta), h}^\infty$  est solution du problème extrémal borné :

$$\|f - g_\delta\|_{L^\infty(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{\Delta(\delta), h}^\infty} \|f - g\|_{L^\infty(K)} \quad \left( = \frac{\Delta(\delta)}{\delta} \right) \quad (28)$$

si et seulement si la fonction  $v_\delta = g_\delta w_{\delta \vee 1}$  est solution du problème de Nehari :

$$\|(f \vee h) w_{\delta \vee 1} - v_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \min_{v \in H^\infty} \|(f \vee h) w_{\delta \vee 1} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \quad \left( = \Delta(\delta) \right) \quad (29)$$

Finalement, c'est le lemme suivant qui nous permet de déterminer la solution  $\hat{g}$  du problème (25) :

**Lemme 3** Si  $f \vee h \notin H^\infty$ , alors l'application  $\Delta$  est définie sur  $]0, \infty[$  ; de plus  $\Delta$  est continue et est strictement croissante sur  $]0, \infty[$ . Par ailleurs l'application  $\delta \mapsto \frac{\Delta(\delta)}{\delta}$  est monotone décroissante.

Montrons tout d'abord comment ce lemme permet de résoudre le problème (25). Puisque  $\Delta$  est une application strictement monotone de  $]0, \infty[$  sur  $]0, \infty[$ , alors, pour toute constante positive  $M$ , il existe une unique valeur  $\delta_0$  de  $\delta$  telle que  $\Delta(\delta_0) = M$ . La valeur de  $\beta_\infty$  est ainsi donnée par :

$$\beta_\infty = \frac{M}{\delta_0} = \frac{M}{\Delta^{-1}(M)} \quad (30)$$

La monotonie de l'application  $\Delta$  autorise la détermination de  $\delta_0$  par une procédure dichotomique. Par ailleurs, compte tenu de la monotonie de l'application  $\delta \mapsto \frac{\Delta(\delta)}{\delta}$ , cette dichotomie peut être améliorée, puisque pour tout un réel positif  $\delta$  :

$$\Delta(\delta) < M \implies \delta < \frac{M}{\Delta(\delta)} \delta < \delta_0 \quad \text{et} \quad \Delta(\delta) > M \implies \delta_0 < \frac{M}{\Delta(\delta)} \delta < \delta.$$

#### Démonstration du lemme 3

Soit  $\delta > 0$ . Puisque  $(f \vee h) w_{\delta \vee 1} \in H^\infty + C(\mathbb{T})$  alors, par le théorème II.2, il existe une unique fonction  $v_\delta \in H^\infty$  telle que :

$$\min_{v \in H^\infty} \|(f \vee h) w_{\delta \vee 1} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|(f \vee h) w_{\delta \vee 1} - v_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \Delta(\delta). \quad (31)$$

Soient  $\delta_1$  et  $\delta_2$  deux réels positifs distincts. Si  $v = w_{\delta_1 \vee 1} w_{\delta_2 \vee 1}^{-1} v_{\delta_2}$  et  $\delta = \delta_1$ , alors par (31) et compte tenu de l'unicité de la solution  $v_\delta$ , nous avons l'inégalité (stricte) suivante :

$$\Delta(\delta_1) < \|(f \vee h) w_{\delta_1 \vee 1} - w_{\delta_1 \vee 1} w_{\delta_2 \vee 1}^{-1} v_{\delta_2}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|w_{\delta_1 \vee 1} w_{\delta_2 \vee 1}^{-1} ((f \vee h) w_{\delta_2 \vee 1} - v_{\delta_2})\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

et puisque  $w_{\delta_1 \vee 1} w_{\delta_2 \vee 1}^{-1} = w_{\frac{\delta_1}{\delta_2} \vee 1}$ , nous avons :

$$\Delta(\delta_1) < \max \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \|(f \vee h) w_{\delta_2 \vee 1} - v_{\delta_2}\|_{L^\infty(K)}, \|(f \vee h) w_{\delta_2 \vee 1} - v_{\delta_2}\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} \right)$$

soit encore après simplification et compte tenu des rôles symétriques que jouent  $\delta_1$  et  $\delta_2$  :

$$\Delta(\delta_2) \min \left( \frac{\delta_1}{\delta_2}, 1 \right) < \Delta(\delta_1) < \Delta(\delta_2) \max \left( \frac{\delta_1}{\delta_2}, 1 \right). \quad (32)$$

Les relations suivantes en découlent immédiatement :

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_2 \iff \Delta(\delta_1) = \Delta(\delta_2) & ; \quad \delta_1 < \delta_2 \iff \Delta(\delta_1) < \Delta(\delta_2) \\ \Delta(\delta_1) < \Delta(\delta_2) \implies \frac{\Delta(\delta_2)}{\delta_2} < \frac{\Delta(\delta_1)}{\delta_1}. \end{cases}$$

Ainsi l'application  $\Delta$  est strictement croissante alors que l'application  $\delta \mapsto \frac{\Delta(\delta)}{\delta}$  est strictement décroissante. Par ailleurs, la continuité de  $\Delta$  est une simple conséquence des inégalités (32). Pour s'en convaincre, considérons un réel  $\delta$  positif et un  $\epsilon$  suffisamment petit. La relation (32) s'écrit alors :

$$\Delta(\delta) \left( 1 + \min \left( \frac{\epsilon}{\delta}, 0 \right) \right) \leq \Delta(\delta + \epsilon) \leq \Delta(\delta) \left( 1 + \max \left( \frac{\epsilon}{\delta}, 0 \right) \right)$$

c'est-à-dire

$$\Delta(\delta) \leq \Delta(\delta + \epsilon) \leq \Delta(\delta) \left( 1 + \frac{\epsilon}{\delta} \right)$$

ce qui permet de déduire que l'application  $\Delta$  est continue.

Puisqu'elle est continue et croissante sur  $]0, \infty[$ , l'application  $\Delta$  admet une limite  $l$  à l'infini. Supposons que  $l$  soit finie de sorte que  $\Delta(\delta) \leq l$  pour tout réel  $\delta$  positif. Considérons une suite réelle et positive  $(\delta_n)_{n>0}$ , avec  $\delta_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , ainsi que la suite  $(v_{\delta_n})_{n>0}$  des solutions correspondantes. Compte tenu de :

$$\|f - v_n w_{\delta_n \vee 1}^{-1}\|_{L^\infty(K)} = \frac{\Delta(\delta_n)}{\delta_n} \leq \frac{l}{\delta_n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|v_n w_{\delta_n \vee 1}^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} \leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} + l < \infty,$$

la suite  $v_n w_{\delta_n \vee 1}^{-1}$  de fonctions de  $H^\infty$  converge vers  $f$  sur  $K$  tout en restant bornée sur son complémentaire  $\mathbb{T} \setminus K$ . La proposition 1 ne permet une telle convergence que si  $f \in H^\infty$  ce qui contredit l'hypothèse  $f \notin H^\infty_K$  faite sur  $f$ . Ainsi :

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \Delta(\delta) = \infty.$$

Finalement, pour démontrer que  $\Delta(\delta) \rightarrow 0$  quand  $\delta \rightarrow 0$ , supposons au contraire qu'il existe une constante positive  $C$  qui minore strictement l'application  $\Delta$ . Soit  $(\delta_n)$  une suite réelle positive qui converge vers 0. Puisque  $h \in (H^\infty + C(\mathbb{T}))|_{\mathbb{T} \setminus K}$ , et que  $H^\infty_{\mathbb{T} \setminus K}$  est dense dans  $C(\mathbb{T} \setminus K)$  par le théorème II.4 de Runge (en supposant que  $K$  admet un point intérieur), alors il existe une fonction  $g \in H^\infty$  telle que  $\|h - g\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} < C$ . Il en résulte que la suite  $(g w_{\delta_n \vee 1})_{n>0}$  vérifie :

$$\Delta(\delta_n) \leq \|(f \vee h) w_{\delta_n \vee 1} - g w_{\delta_n \vee 1}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \max(\delta_n \|f - g\|_{L^\infty(K)}, \|h - g\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)})$$

ce qui compte tenu de l'hypothèse  $0 < C < \Delta(\delta_n)$  pour tout  $n$ , implique :

$$0 < C < \Delta(\delta_n) < \delta_n \|f - g\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \delta_n \rightarrow 0,$$

une contradiction qui montre que :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta(\delta) = 0.$$

La démonstration du lemme est ainsi complète.  $\square$

### III-3 Le problème extrémal borné pour $p = 2$

Pour  $p = 2$ , le problème extrémal borné consiste à trouver une fonction  $\hat{g} \in \mathcal{B}_{M,h}^2$  avec

$$\mathcal{B}_{M,h}^2 = \{g \in H^2 ; \|g - h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} \leq M\} ,$$

telle que :

$$\|f - \hat{g}\|_{L^2(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{M,h}^2} \|f - g\|_{L^2(K)} . \quad (33)$$

Ce problème extrémal borné a été étudié par Baratchart et *al.* pour  $h = 0$  et une caractérisation de la solution a été donnée dans [3]. Cette étude se généralise directement pour toute fonction  $h \in H_{|\mathbb{T} \setminus K}^2$ . En effet, lorsque la fonction  $h$  est la trace sur  $\mathbb{T} \setminus K$  d'une fonction de  $H^2$  notée encore  $h$ , alors  $\hat{g} \in \mathcal{B}_{M,h}^2$  est solution du problème (33) si et seulement si  $\hat{g} - h \in \mathcal{B}_{M,0}^2$  est solution du problème (34) suivant :

$$\|(f - h) - (\hat{g} - h)\|_{L^2(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{M,0}^2} \|(f - h) - g\|_{L^2(K)} . \quad (34)$$

Cette équivalence basée sur le fait que  $\mathcal{B}_{M,0}^2 = \mathcal{B}_{M,h}^2 - h$ , permet d'obtenir la caractérisation de la solution  $\hat{g}$  du problème (33) à partir de celle du problème (34) donnée dans [3].

Pour exclure la solution triviale  $\hat{g} = f$ , nous supposons désormais que  $f \notin H^2 \cap \mathcal{B}_{M,h}^2$  pour toute valeur positive de  $M$  ou d'une manière équivalente  $f \notin H_{|K}^2$ . En outre nous supposons  $h \in H^2$ .

Le théorème 4 implique que la solution  $\hat{g}$  du problème (33) minimise, sur  $\mathcal{B}_{M,h}^2$ , la fonction  $\Psi$  définie par :

$$\begin{aligned} \Psi : H^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \|f - g\|_{L^2(K)}^2 \end{aligned}$$

et sature la contrainte, c'est-à-dire appartient à l'ensemble  $\Gamma_M$  suivant :

$$\Gamma_M = \{g \in H^2 , \|g - h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = M\} ,$$

soit encore, puisque  $\mathcal{B}_{M,h}^2$  est convexe et fermé et compte tenu de la caractérisation bien connue de la projection (cf. proposition II.2), cette solution  $\hat{g}$  est l'élément de  $\Gamma_M$  égal à la projection de  $f$  sur  $\mathcal{B}_{M,h}^2$  caractérisée par :

$$\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, g - \hat{g} \rangle_{L^2(K)} \leq 0 \quad \forall g \in \mathcal{B}_{M,h}^2 . \quad (35)$$

La proposition suivante nous permet de caractériser la solution  $\hat{g}$  du problème (33) :

**Proposition 4** *La solution  $\hat{g}$  du problème (33) est l'unique point critique de l'application  $\Psi$  sur la variété différentielle  $\Gamma_M$  vérifiant :*

$$\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, \hat{g} - h \rangle_{L^2(K)} \geq 0 . \quad (36)$$

**Remarque 1** Lorsque  $h = 0$ , nous retrouvons la caractérisation de la solution du problème (34) donnée par [3, prop.3].

Le reste de la section III-3 est dédié à la démonstration de cette proposition. Mais tout d'abord commençons par préciser quelques notations et résultats préliminaires.

Soit  $P_{H^2}$  la projection naturelle de  $L^2(\mathbb{T})$  dans  $H^2$ . Sans le mentionner explicitement, nous userons dans la suite de nos calculs de la propriété fondamentale suivante de cette projection :

$$\forall (u, v) \in \left( L^2(\mathbb{T}) \right)^2 : \langle P_{H^2}(u), v \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle u, P_{H^2}(v) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle P_{H^2}(u), P_{H^2}(v) \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

et de la définition suivante du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}$  dans  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$  :

$$\forall (u, v) \in \left( L^2(\mathbb{T}) \right)^2 : \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = \langle \chi_{\mathbb{T} \setminus K} u, v \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle u, \chi_{\mathbb{T} \setminus K} v \rangle_{L^2(\mathbb{T})} .$$

Par ailleurs, si  $\Gamma$  désigne l'application :

$$\begin{aligned} \Gamma : H^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \|g - h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2 = \langle g - h, g - h \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} , \end{aligned}$$

alors nous avons le résultat intermédiaire suivant dont la démonstration est basée sur le fait que les sphères sont des sous-variétés dans les espaces hilbertiens [47, Ex-page27].

**Lemme 4** Dans l'espace réel hilbertien  $H^2$ , l'ensemble  $\Gamma_M$  est une sous-variété dont l'espace tangent est défini en tout point  $g$  par  $\mathcal{T}_{\Gamma_M}(g) = \text{Ker } \mathcal{D}_g \Gamma$ .

**Démonstration :**

Pour toutes fonctions  $g$  et  $u$  de  $H^2$ , le calcul suivant :

$$\Gamma(g + u) - \Gamma(g) = 2 \text{Re} \langle g - h, u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} + o(\|u\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}) ,$$

montre que la différentielle  $\mathcal{D}_g \Gamma$  de  $\Gamma$  en  $g$  est donnée au point  $u$  par :

$$\mathcal{D}_g \Gamma(u) = 2 \text{Re} \langle g - h, u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} .$$

De la même manière, si  $v$  et  $w$  sont deux éléments de  $H^2$  alors les calculs simples suivants :

$$\mathcal{D}_{g+v} \Gamma(u) - \mathcal{D}_g \Gamma(u) = 2 \text{Re} \langle v, u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = \mathcal{D}_g^2 \Gamma(u)(v), \quad \mathcal{D}_{g+w}^2 \Gamma(u)(v) - \mathcal{D}_g^2 \Gamma(u)(v) = 0$$

montrent que les différentielles  $\mathcal{D}_g^n \Gamma$  d'ordre  $n$  de  $\Gamma$  sont toutes nulles pour  $n \geq 3$ . Il en résulte que l'application  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$  dans  $H^2$ .

Indiquons au passage que, par les mêmes arguments, l'application  $\Psi$  est de classe  $C^\infty$  dans  $H^2$  et que sa différentielle  $\mathcal{D}_g \Psi$  au point  $g$  est donnée au point  $u$  par :

$$\mathcal{D}_g \Psi(u) = 2 \text{Re} \langle f - g, u \rangle_{L^2(K)} . \quad (37)$$

Par ailleurs, puisque d'une part, l'application  $\mathcal{D}_g \Gamma$  est surjective pour  $g - h \neq 0$  et que d'autre part,  $\mathcal{D}_g \Gamma$  est une application linéaire continue sur l'espace hilbertien réel  $H^2$  et par conséquent que son noyau  $\text{Ker } \mathcal{D}_g \Gamma$  est un sous-espace fermé dont le complémentaire orthogonale au sens du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}$  est le sous-espace engendré par le vecteur  $g - h$  (le noyau se scinde), il en résulte par la proposition [47, II,2,prop.2] que l'application  $\Gamma$  est submersive. Finalement, le théorème de l'image réciproque [82, Thm.4.J] permet de conclure que l'ensemble  $\Gamma_M = \Gamma^{-1}(M^2)$  est une sous-variété de  $H^2$  dont l'espace tangent est donné en tout point  $g$  par  $\mathcal{T}_{\Gamma_M}(g) = \text{Ker } \mathcal{D}_g \Gamma$ , c'est-à-dire :

$$\text{Re} \langle g - h, u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{T}_{\Gamma_M}(g) . \quad (38)$$

### III-3.1 Caractérisation de la solution du problème extrémal borné

Nous allons démontrer que la proposition 4 permet, dans le paragraphe III-3.2 suivant, d'obtenir un procédé effectif pour calculer la solution  $\hat{g}$  du problème (33).

#### Démonstration de la proposition 4 :

Si  $\hat{g}$  appartient à  $\Gamma_M$  et vérifie (35), alors  $\hat{g}$  est, par la proposition II.2, un point critique de  $\Psi$  et vérifie en particulier (36) puisque  $h \in \mathcal{B}_{M,h}^2$ .

Réciproquement, si  $\hat{g}$  est un point critique de  $\Psi$  sur  $\Gamma_M$  et vérifie (36), alors :

$$\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, \hat{g} - h \rangle_{L^2(K)} \geq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, u \rangle_{L^2(K)} = 0, \forall u \in \mathcal{T}_{\Gamma_M}(\hat{g}).$$

Pour tout élément  $g \in \mathcal{B}_{M,h}^2$ , la projection orthogonale  $\tilde{g}$  du vecteur  $g - h$  sur  $\mathcal{T}_{\Gamma_M}(\hat{g})$  au sens  $\operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}$ , est définie par :

$$\tilde{g} = g - h - \frac{\operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, g - h \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}}{M^2} (\hat{g} - h).$$

En effet, le calcul suivant où les produits scalaires sont tous dans  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$  :

$$\operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, \tilde{g} \rangle = \operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, g - h \rangle - \frac{\operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, g - h \rangle}{M^2} \operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, \hat{g} - h \rangle = 0,$$

montre, grâce à l'équation (38), que  $\tilde{g} \in \mathcal{T}_{\Gamma_M}(\hat{g})$ . Nous en déduisons que  $\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, \tilde{g} \rangle_{L^2(K)} = 0$ , soit encore :

$$\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, g - h \rangle_{L^2(K)} = \frac{\operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, g - h \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}}{M^2} \operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, \hat{g} - h \rangle_{L^2(K)}.$$

Compte tenu de cette dernière équation, il en résulte que :

$$\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, g - \hat{g} \rangle_{L^2(K)} = \left( \frac{1}{M^2} \operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, g - h \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} - 1 \right) \operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, \hat{g} - h \rangle_{L^2(K)}.$$

Mais puisque d'une part et par hypothèse

$$\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, \hat{g} - h \rangle_{L^2(K)} \geq 0$$

et que d'autre part

$$\operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, g - h \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} \leq \|\hat{g} - h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} \|g - h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} \leq M^2$$

nous en déduisons que  $\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, g - \hat{g} \rangle_{L^2(K)} \leq 0$  ce qui, par la proposition II.2, montre que le point  $\hat{g}$  est la solution du problème (33).  $\square$

Notre prochaine étape dans la résolution du problème (33) consiste à donner à partir de la relation (36), une formule plus explicite pour déterminer la solution  $\hat{g}$ .

### III-3.2 Calcul de la solution du problème extrémal borné

Introduisons l'opérateur de Toeplitz  $\mathbf{T}$  de symbole  $\chi_{\mathbb{T} \setminus K}$  et défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : H^2 &\longrightarrow H^2 \\ u &\longmapsto P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K} u) \end{aligned}$$



La fonction  $\chi_{T \setminus K}$  de  $L^\infty(T)$  est réelle positive et de norme 1 ; il en résulte (voir [69, page-63]) que l'opérateur  $T$  est borné auto-adjoint positif et de norme égale à 1. De plus, le spectre  $\sigma(T)$  de  $T$  est donné par :

$$\sigma(T) = [\text{ess inf } \chi_{T \setminus K}, \text{ess sup } \chi_{T \setminus K}] = [0, 1].$$

Ainsi, l'opérateur  $T - \nu I$  est auto-adjoint borné et inversible pour  $\nu \notin [0, 1]$ . Il en résulte que l'opérateur  $\lambda T + I$  admet un inverse auto-adjoint borné pour tout réel  $\lambda \in ]-1, \infty[$ . Introduisons alors l'application  $\mathcal{M}$  suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : ]-1, \infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \|h - (1 + \lambda T)^{-1} (P_{H^2}(\chi_K f) + (1 + \lambda) T(h))\|_{L^2(T \setminus K)}^2. \end{aligned}$$

Les deux lemmes 5 et 6 suivants nous permettent de construire un procédé effectif de calcul de la solution  $\hat{g}$ . Le lemme 6 permet de déterminer une équation implicite en  $\lambda$  et c'est le lemme 5 qui nous garantit un schéma dichotomique pour finalement trouver la solution  $\hat{g}$  :

**Lemme 5** *L'application  $\mathcal{M}$  est continue et décroissante de  $]-1, \infty[$  dans  $]0, \infty[$ .*

**Lemme 6** *La solution  $\hat{g}$  du problème (33) est la fonction de  $H^2$  définie par :*

$$\hat{g} = (1 + \lambda T)^{-1} (P_{H^2}(\chi_K f) + (1 + \lambda) T(h)) \quad (39)$$

où  $\lambda$  est l'unique réel de  $]-1, \infty[$  choisi tel que  $\|\hat{g} - h\|_{L^2(T \setminus K)} = M$ .

En fait pour tout réel  $\lambda$  de  $]-1, \infty[$ , la fonction  $g_\lambda$  définie par :

$$g_\lambda = (1 + \lambda T)^{-1} (P_{H^2}(\chi_K f) + (1 + \lambda) T(h)), \quad (40)$$

est solution du problème extrémal borné suivant :

$$\|f - g_\lambda\|_{L^2(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{\sqrt{\mathcal{M}(\lambda)}, h}} \|f - g\|_{L^2(K)}. \quad (41)$$

Par ailleurs, puisque l'application  $\mathcal{M}$  est monotone et continue, il existe, pour toute constante positive  $M$ , un réel  $\lambda_0$  de  $]-1, \infty[$  tel que  $\mathcal{M}(\lambda_0) = M$  et la solution  $g_{\lambda_0}$  du problème (41) n'est autre que la solution  $\hat{g}$  du problème (33).

### Démonstration du lemme 5

Soit  $\lambda$  un réel de  $]-1, \infty[$ . Remarquons d'abord que l'expression de  $\mathcal{M}(\lambda)$  est aussi égale, après simplification à :

$$\mathcal{M}(\lambda) = \|(1 + \lambda T)^{-1} P_{H^2}(\chi_K (f - h))\|_{L^2(T \setminus K)}^2, \quad (42)$$

et que l'application  $\mathcal{M}$  est différentiable avec :

$$\frac{d\mathcal{M}(\lambda)}{d\lambda} = -2 \operatorname{Re} \langle T(1 + \lambda T)^{-2} P_{H^2}(\chi_K (f - h)), (1 + \lambda T)^{-1} P_{H^2}(\chi_K (f - h)) \rangle_{L^2(T \setminus K)}$$

Puisque l'opérateur  $T$  est auto-adjoint positif et en vertu de la règle de différentiation de l'inverse d'un opérateur dans une algèbre de Banach, les opérateurs  $(1 + \lambda T)^{-1}$  et  $T(1 + \lambda T)^{-2}$  sont aussi, pour toute valeur de  $\lambda$  dans  $]-1, \infty[$ , auto-adjoints et positifs, alors

$$\forall \lambda > -1 : \frac{d\mathcal{M}}{d\lambda}(\lambda) \leq 0.$$

Il en résulte que l'application  $\mathcal{M}$  est continûment décroissante sur  $] -1, \infty[$  et admet des limites quand  $\lambda$  tend respectivement vers  $-1$  et vers  $+\infty$ .

Nous allons démontrer que dans l'espace réflexif  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$  les limites suivantes :

$$\lim_{\lambda \rightarrow -1} \mathcal{M}(\lambda) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{M}(\lambda) = 0,$$

sont des simples conséquences du fait que la fonction  $g_\lambda$ , solution du problème (41), est la fonction initialement donnée par l'équation (43) suivante qui n'est autre que la relation (44) :

$$\lambda P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(g_\lambda - h)) = P_{H^2}(f \vee h) - g_\lambda. \quad (43)$$

En effet, puisque l'application  $\mathcal{M}$  est continue et décroissante alors il existe une constante positive  $\lambda_1$  tel que pour tout  $\lambda > \lambda_1$  :  $\mathcal{M}(\lambda) = \|g_\lambda - h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2 \leq C$ , où  $C$  est une constante positive. Il en résulte, que la famille  $(g_\lambda - h)_{\lambda > \lambda_1}$  est contenue dans une boule de  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ . Alors il existe, par le théorème de Banach-Alaoglu une sous-famille  $(g_{\lambda_k} - h)_{\lambda_k > \lambda_1}$  qui converge faiblement vers une fonction  $g_\infty - h$  dans  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ . Compte tenu de (43) nous avons :

$$\|P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(g_{\lambda_k} - h))\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} \leq \frac{\|P_{H^2}(f \vee h)\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} + C + \|h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}}{\lambda_k} \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda_k \rightarrow \infty,$$

ce qui implique que :

$$\|P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(g_\infty - h))\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = 0.$$

Il en résulte que  $\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(g_\infty - h)$  est dans  $\overline{H}_0^2$ . Nulle sur l'ensemble  $\mathbb{T} \setminus K$  de mesure de Lebesgue positive, la fonction  $\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(g_\infty - h)$  est identiquement nulle dans  $\overline{H}_0^2$  par le lemme II.3 qui reste vrai dans l'espace  $\overline{H}_0^2$ . Par conséquent :

$$\lim_{\lambda_k \rightarrow \infty} \mathcal{M}(\lambda_k) = \|g_\infty - h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2 = 0.$$

Finalement et pour démontrer que  $\mathcal{M}(\lambda) \rightarrow \infty$  quand  $\lambda \rightarrow -1$ , supposons au contraire que  $\mathcal{M}$  admet une limite finie  $l_{-1}$  en  $-1$ . Alors, dans l'espace réflexif  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ , la famille  $(g_\lambda - h)_{\lambda > -1}$  contenue dans la boule de rayon  $l_{-1}$  admet une sous-famille  $(g_{\lambda_k} - h)_{\lambda_k > -1}$  qui converge faiblement vers la fonction  $g_{-1} - h$  dans  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ . Puisque d'une part l'équation (43) implique par passage à la limite faible dans (43) que :

$$-P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(g_{-1} - h)) = P_{H^2}(f \vee h) - g_{-1},$$

ou après simplification :

$$P_{H^2}(\chi_K(f - g_{-1})) = 0,$$

soit encore  $\chi_K(f - g_{-1}) = 0$ , et puisque d'autre part, l'espace  $H^2$  est fermé et que par conséquent  $g_{-1}$  est dans  $H^2$ , alors nécessairement  $f \in H_{|K}^2$ . Compte tenu de l'hypothèse  $f \notin H_{|K}^2$  faite initialement sur  $f$ , nous déduisons de cette contradiction que :

$$\lim_{\lambda_k \rightarrow -1} \mathcal{M}(\lambda) = \infty,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

### Démonstration du lemme 6

Soit  $f \vee h$  la concaténation des fonctions  $f$  sur  $K$  et  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Puisque la solution  $\hat{g}$  est l'unique point critique de  $\Psi$ , alors par (37) et (38), nous avons :

$$\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, u \rangle_{L^2(K)} = \operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = 0, \quad \forall u \in \mathcal{T}_{\Gamma_M}(\hat{g})$$

c'est-à-dire :

$$\forall u \in \mathcal{T}_{\Gamma_M}(\hat{g}), \operatorname{Re} \langle P_{H^2}(f \vee h) - \hat{g}, u \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0 \text{ et } \operatorname{Re} \langle P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(\hat{g} - h)), u \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0.$$

Il en résulte que les deux vecteurs  $P_{H^2}(f \vee h) - \hat{g}$  et  $P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(\hat{g} - h))$  de l'espace hilbertien réel  $H^2$ , orthogonaux tous les deux à l'espace  $\mathcal{T}_{\Gamma_M}(\hat{g})$  qui est de codimension 1, sont nécessairement colinéaires. Il existe donc un réel  $\lambda$  tel que :

$$\lambda P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(\hat{g} - h)) = P_{H^2}(f \vee h) - \hat{g}. \quad (44)$$

Notons que  $P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(\hat{g} - h)) \neq 0$  sauf si  $\hat{g} - h|_K = 0$  ce que nous avons préalablement exclu compte tenu de l'hypothèse  $f \notin H^2|_K$ .

Par ailleurs, grâce à la proposition 4 et puisque  $\hat{g}$  est un élément de  $\Gamma_M$ , nous avons :

$$\operatorname{Re} \langle f - \hat{g}, \hat{g} - h \rangle_{L^2(K)} \geq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \langle \hat{g} - h, \hat{g} - h \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = M^2,$$

soit encore par soustraction :

$$\operatorname{Re} \langle P_{H^2}(f \vee h) - \hat{g}, \hat{g} - h \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \operatorname{Re} \langle P_{H^2}(f \vee h) - \hat{g}, P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(\hat{g} - h)) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \geq -M^2.$$

Finalement, compte tenu de la relation (44), nous avons donc :

$$-M^2 \leq \lambda \operatorname{Re} \langle P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(\hat{g} - h)), P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K}(\hat{g} - h)) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \lambda M^2,$$

ce qui permet de déduire que  $\lambda \geq -1$ . Pour achever cette démonstration, remarquons que la relation (44) donnant la solution  $\hat{g}$  s'écrit sous la forme équivalente (39).  $\square$

### III-4 La complétion analytique bornée dans $H^2$

Dans le cas hilbertien  $p = 2$ , le problème 2 admet une solution explicite [12]. Le théorème suivant nous rappelle ce résultat :

**Théorème 5** [12, thm.1]

Soit  $K$  un sous ensemble de  $\mathbb{T}$  tel que  $\lambda(K) > 0$  et  $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$ . Soient  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$  et  $C$  une constante positive. Il existe une unique fonction  $\tilde{h} \in \mathcal{F}_C^2$  telle que :

$$\operatorname{dist}(f \vee \tilde{h}, H^2) = \min_{h \in \mathcal{F}_C^2} \operatorname{dist}(f \vee h, H^2). \quad (45)$$

De plus, si  $f$  n'est pas la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^2$  dont la norme sur  $\mathbb{T} \setminus K$  est inférieure à  $C$ , la solution  $\tilde{h}$  sature la contrainte  $C$  c'est-à-dire :

$$f \notin H^2 \cap \mathring{\mathcal{F}}_C^2 \implies \|\tilde{h}\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = C, \quad (46)$$

où  $\mathring{\mathcal{F}}_C^2$  désigne l'intérieur de l'ensemble  $\mathcal{F}_C^2$  :

$$\mathring{\mathcal{F}}_C^2 = \{h \in L^2(\mathbb{T} \setminus K), \|h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} < C\}.$$

Notons d'abord que, si  $P_{\overline{H}_0^2}$  désigne la projection naturelle sur  $\overline{H}_0^2$ , cette la relation (45) est équivalente à :

$$\|P_{\overline{H}_0^2}(f \vee \tilde{h})\|_{L^2(\mathbb{T})} = \min_{h \in \mathcal{F}_C^2} \|P_{\overline{H}_0^2}(f \vee h)\|_{L^2(\mathbb{T})} \quad (47)$$

puisque pour toute fonction  $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ ,

$$\text{dist}(\varphi, H^2) = \text{dist}(P_{H^2}\varphi + P_{\overline{H}_0^2}\varphi, H^2) = \text{dist}(P_{\overline{H}_0^2}\varphi, H^2) = \|P_{\overline{H}_0^2}\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

### Démonstration du théorème 5

La relation (47) nous permet de caractériser la solution  $\tilde{h}$  comme la fonction de  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$  qui minimise sur  $\mathcal{F}_C^2$  la fonction  $\Sigma$  suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma : L^2(\mathbb{T} \setminus K) &\longrightarrow [0, \infty[ \\ u &\longmapsto \|P_{\overline{H}_0^2}(f \vee u)\|_{L^2(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Puisque la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})}$  est convexe et que l'application  $P_{\overline{H}_0^2}$  est linéaire dans  $L^2(\mathbb{T})$ , la fonction  $\Sigma$  est manifestement convexe. Par ailleurs, si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ , le calcul suivant :

$$|\Sigma(x) - \Sigma(y)| \leq \|P_{\overline{H}_0^2}(f \vee x) - P_{\overline{H}_0^2}(f \vee y)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|P_{\overline{H}_0^2}(0 \vee (x - y))\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|x - y\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)},$$

montre que  $\Sigma$  est continue dans  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ . Posons :

$$\Sigma^* = \inf_{h \in \mathcal{F}_C^2} \Sigma(h),$$

et considérons une suite minimisante  $(h_n)_{n \geq 1}$  de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{F}_C^2$ .

Dans l'espace reflexif  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ , l'ensemble  $\mathcal{F}_C^2$  est, par le théorème de Banach-Alaoglu, faiblement compact. Il en résulte que la suite bornée  $(h_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{F}_C^2$  admet une sous-suite faiblement convergente  $(h_{n_k})_{k \geq 1}$  et que la limite  $\tilde{h}$  d'une telle suite appartient à  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$  et vérifie  $\|\tilde{h}\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} \leq C$  et par conséquent  $\tilde{h} \in \mathcal{F}_C^2$ . Par ailleurs, puisque l'application  $\Sigma$  est convexe et continue, le corollaire [16, cor.III.8] sur la semi-continuité inférieure implique que

$$\Sigma(\tilde{h}) \leq \liminf \Sigma(h_{n_k}),$$

et compte tenu de la définition de  $\Sigma^*$ , nous avons finalement :

$$\Sigma^* = \Sigma(\tilde{h}) \quad \text{et} \quad \tilde{h} \in \mathcal{F}_C^2.$$

Ainsi,  $\tilde{h}$  réalise le minimum de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{F}_C^2$  et est donc solution du problème (45).

Quand à l'unicité de la solution  $\tilde{h}$ , elle est une conséquence soit du lemme II.3 lorsque  $f$  est la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^2$  dont la norme sur  $\mathbb{T} \setminus K$  ne dépasse pas  $C$ , soit de la proposition II.1 sur la stricte convexité de l'espace  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$  lorsque  $f \notin H^2 \cap \mathring{\mathcal{F}}_C^2$ .

En effet, supposons que  $f \in H^2 \cap \mathring{\mathcal{F}}_C^2$  et considérons deux solutions  $h_1$  et  $h_2$  du problème (45). Puisque  $f \in \mathring{\mathcal{F}}_C^2$ , alors :

$$\Sigma^* = 0 \quad \text{et} \quad \text{dist}(f \vee h_1, H^2) = \text{dist}(f \vee h_2, H^2) = 0.$$

Il en résulte que les deux fonctions  $f \vee h_1$  et  $f \vee h_2$  sont dans  $H^2$  et coïncident sur l'ensemble  $K$  de mesure non nulle. Le lemme II.3 implique l'égalité des fonctions  $h_1$  et  $h_2$  et par conséquent l'unicité de la solution.

Supposons maintenant que  $f \notin H^2 \cap \mathring{\mathcal{F}}_C^2$  et admettons pour l'instant la propriété (46) et considérons de nouveau deux solutions  $h_1$  et  $h_2$  du problème (45) qui vérifient en particulier

$\|h_1\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = \|h_2\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = C$ . Le convexité de l'ensemble  $\mathcal{F}_C^2$  d'une part et de l'application  $\Sigma$  d'autre part impliquent que :

$$\frac{h_1 + h_2}{2} \in \mathcal{F}_C^2 \quad \text{et} \quad \Sigma\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\Sigma(h_1) + \Sigma(h_2)) = \Sigma^*.$$

Il en résulte que  $\frac{h_1 + h_2}{2}$  est aussi une solution et sature ainsi la contrainte. Compte tenu de la stricte convexité de  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ , l'égalité  $\|\frac{h_1 + h_2}{2}\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = C$  implique nécessairement  $h_1 = h_2$  et par conséquent l'unicité de la solution.

Pour finir la démonstration du théorème, il nous reste à montrer (46). Observons d'abord que si  $f \in H^2 \cap \mathring{\mathcal{F}}_C^2$  alors  $\Sigma(f) = 0$ . La fonction  $f$  est ainsi une solution du problème (45) sans pour autant saturer la contrainte puisque  $\|f\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} < C$ .

Supposons que la solution  $\tilde{h}$  ne sature pas la contrainte :  $\|\tilde{h}\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} < C$ . La fonction  $\tilde{h}$  est un minimum local de l'application  $\Sigma$  résidant à l'intérieur de  $\mathcal{F}_C^2$ . Puisque  $\Sigma$  est convexe,  $\tilde{h}$  est de ce fait un minimum global. Par ailleurs, l'ensemble  $H_{|K}^2$  étant dense dans l'espace  $L^2(K)$ , il existe alors une suite  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  de fonctions de  $H^2$  qui converge vers  $f$  dans  $L^2(K)$ . Il en résulte que la suite  $(f \vee \xi_n|_{\mathbb{T} \setminus K} - \xi_n)_{n \geq 1}$  converge vers zéro dans  $L^2(\mathbb{T})$  ce qui implique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f \vee \xi_n|_{\mathbb{T} \setminus K}, H^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(\xi_n|_{\mathbb{T} \setminus K}) = 0.$$

Compte tenu du fait que  $\tilde{h}$  est un minimum global de  $\Sigma$ , nous avons nécessairement  $\Sigma(\tilde{h}) = 0$  et par conséquent  $f \vee \tilde{h} \in H^2$ . Il en résulte que  $f|_{\mathbb{T} \setminus K} = \tilde{h}$  c'est-à-dire  $f \in H^2 \cap \mathring{\mathcal{F}}_C^2$ . Nous avons ainsi démontré que

$$\|\tilde{h}\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} < C \quad \implies \quad f \in H^2 \cap \mathring{\mathcal{F}}_C^2$$

et le résultat (46) s'en déduit.  $\square$

### III-4.1 Caractérisation de la meilleure complétion bornée

Pour exclure la solution triviale  $\tilde{h} = f|_{\mathbb{T} \setminus K}$ , nous supposons désormais que  $f \notin H^2 \cap \mathcal{F}_C^2$ .

Continuons à désigner par  $\mathbf{T}$  l'opérateur de Toeplitz de symbole  $\chi_{\mathbb{T} \setminus K}$  introduit dans la section III-3 et défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : H^2 &\longrightarrow H^2 \\ u &\longmapsto P_{H^2}(\chi_{\mathbb{T} \setminus K} u), \end{aligned}$$

et introduisons par ailleurs l'application  $\Theta$  suivante :

$$\begin{aligned} \Theta : L^2(\mathbb{T} \setminus K) &\longrightarrow [0, \infty[ \\ u &\longmapsto \|u\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2. \end{aligned}$$

La proposition suivante nous permet de caractériser entièrement la solution  $\tilde{h}$  :

**Proposition 5** *La solution  $\tilde{h}$  du problème (45) est donnée par :*

$$\tilde{h} = (\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K f), \quad (48)$$

où  $\rho$  est l'unique réel de  $]1, \infty[$  pour lequel  $\|\tilde{h}\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = C$ .

Avant de démontrer cette proposition, nous allons donner par les deux lemmes 7 et 8 suivants quelques résultats intermédiaires.

**Lemme 7** *L'application  $\Theta$  est de classe  $C^\infty$  dans  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ . Sa différentielle  $\mathcal{D}_h\Theta$  au point  $h$  de  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$  est définie par :*

$$\forall u \in L^2(\mathbb{T} \setminus K) : \mathcal{D}_h\Theta(u) = 2 \operatorname{Re} \langle h, u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} .$$

Par ailleurs, dans l'espace hilbertien réel  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ , l'ensemble  $\Theta_C$  défini par :

$$\Theta_C = \partial \mathcal{F}_C^2 = \{h \in L^2(\mathbb{T} \setminus K) : \|h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = C\} ,$$

est une sous-variété dont l'espace tangent  $\mathcal{T}_{\Theta_C}$  est donné en tout point  $h$  de  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$  par :

$$\mathcal{T}_{\Theta_C}(h) = \operatorname{Ker} \mathcal{D}_h\Theta .$$

Ces propriétés de l'application  $\Theta$  peuvent être établies de la même manière que celles de l'application  $\Gamma$  précédemment démontrées dans la section III-3.

C'est le lemme 8 suivant qui contient le début de la caractérisation de la solution  $\tilde{h}$  :

**Lemme 8** *La solution  $\tilde{h}$  du problème (45) est l'unique point  $\tilde{h}$  de  $\Theta_C$  qui réalise le minimum de  $\Sigma^2$  sur  $\mathcal{F}_C^2$ . De plus  $\tilde{h}$  est le point critique de  $\Sigma^2$  tel que :*

$$\operatorname{Re} \langle P_{\overline{H}_0^2}(f \vee \tilde{h}), u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = 0, \quad \forall u \in \mathcal{T}_{\Theta_C}(\tilde{h}). \quad (49)$$

Remarquons d'abord que l'application  $\Sigma^2$  hérite de l'application  $\Sigma$  par le théorème 5, un unique minimum sur  $\mathcal{F}_C^2$  atteint en un point  $\tilde{h}$  de  $\Theta_C$ . Compte tenu de la définition de  $\Sigma$  et de la relation (47), ce point  $\tilde{h}$  est la solution du problème (45). Par ailleurs, remarquons que, pour toutes fonctions  $h$  et  $u$  de  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ , le calcul suivant :

$$\Sigma^2(h+u) - \Sigma^2(h) = 2 \operatorname{Re} \langle P_{\overline{H}_0^2}(f \vee h), u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} + \|P_{\overline{H}_0^2}(0 \vee u)\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2, \quad (50)$$

montre que la différentielle  $\mathcal{D}_h\Sigma^2$  de  $\Sigma^2$  en  $h$  est donnée au point  $u$  par :

$$\mathcal{D}_h\Sigma^2(u) = 2 \operatorname{Re} \langle P_{\overline{H}_0^2}(f \vee h), u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} .$$

Par conséquent, le point  $\tilde{h}$  de  $\Theta_C$  est un point critique de  $\Sigma^2$  si et seulement si :

$$\operatorname{Re} \langle P_{\overline{H}_0^2}(f \vee \tilde{h}), u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = 0, \quad \forall u \in \mathcal{T}_{\Theta_C}(\tilde{h}), \quad (51)$$

et le lemme est ainsi démontré.  $\square$

### Démonstration de la proposition 5

Les deux lemmes 7 et 8 précédents montrent que, dans l'espace hilbertien réel  $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ , les deux vecteurs  $\tilde{h}$  et  $P_{\overline{H}_0^2}(f \vee \tilde{h})$  sont orthogonaux à l'espace tangent  $\mathcal{T}_{\Theta_C}(\tilde{h})$ . Le sous-espace  $\mathcal{T}_{\Theta_C}(\tilde{h})$  étant de codimension égale à 1, il en résulte qu'il existe un réel  $\mu$  tel que :

$$P_{\overline{H}_0^2}(f \vee \tilde{h}) = \mu \tilde{h} \quad \text{p.p. sur } \mathbb{T} \setminus K. \quad (52)$$

Nous allons démontrer que l'hypothèse  $f \notin H^2 \cap \mathcal{F}_C^2$  et la minimalité de  $\Sigma^2$  au point  $\tilde{h}$  impliquent nécessairement que  $\mu < 0$ . En effet, d'une part le paramètre  $\mu$  est non nul car sinon la relation (52) impliquerait que  $f \vee \tilde{h} \in H^2$  soit encore  $\tilde{h} = f|_{\mathbb{T} \setminus K}$  et  $f \in H^2 \cap \mathcal{F}_C^2$ . D'autre part, supposons au contraire que  $\mu$  soit positif et considérons un réel  $\alpha$  tel que  $-1 < \alpha < 0$  de sorte que  $(1+\alpha)\tilde{h} \in \mathcal{F}_C^2$ . Compte tenu des relations (50) et (52), nous avons respectivement :

$$\begin{aligned} \Sigma^2((1+\alpha)\tilde{h}) - \Sigma^2(\tilde{h}) &= 2 \operatorname{Re} \langle P_{\overline{H}_0^2}(f \vee \tilde{h}), \alpha \tilde{h} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} + \|P_{\overline{H}_0^2}(\alpha \tilde{h})\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2 \\ &\leq \alpha (2\mu + \alpha) \|\tilde{h}\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2, \end{aligned}$$

et en choisissant, par exemple,  $\alpha = -\min(\mu, 1/2)$ , il en résulte que  $\Sigma^2((1 + \alpha)\tilde{h}) - \Sigma^2(\tilde{h}) < 0$  contredisant ainsi la définition de  $\tilde{h}$ . Nous en déduisons finalement que :

$$\exists \mu < 0 \quad : \quad P_{\tilde{H}_0^2}(f \vee \tilde{h}) = \mu \tilde{h} \quad \text{p.p. sur } \mathbb{T} \setminus K. \quad (53)$$

Les relations (51) et (53) admettent des versions *duales* ou *complémentaires*. En effet, le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle P_{H^2}(f \vee \tilde{h}), u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} &= \operatorname{Re} \langle f \vee \tilde{h} - P_{\tilde{H}_0^2}(f \vee \tilde{h}), u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} \\ &= \operatorname{Re} \langle \tilde{h}, u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} - \operatorname{Re} \langle P_{\tilde{H}_0^2}(f \vee \tilde{h}), u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}, \end{aligned}$$

montre d'une part et compte tenu de la relation (49) que

$$\operatorname{Re} \langle P_{H^2}(f \vee \tilde{h}), u \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = 0 \quad \forall u \in \mathcal{T}_{\Theta_C}(\tilde{h}), \quad (54)$$

et d'autre part grâce à la relation (51) qu'il existe un réel  $\rho$  tel que :

$$P_{H^2}(f \vee \tilde{h}) = \rho \tilde{h} \quad \text{p.p. sur } \mathbb{T} \setminus K.$$

En observant par ailleurs que :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h}, \tilde{h} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} &= \operatorname{Re} \langle f \vee \tilde{h}, \tilde{h} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = \operatorname{Re} \langle P_{H^2}(f \vee \tilde{h}) + P_{\tilde{H}_0^2}(f \vee \tilde{h}), \tilde{h} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} \\ &= (\rho + \mu) \langle \tilde{h}, \tilde{h} \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}, \end{aligned}$$

nous en déduisons que  $\rho + \mu = 1$ . Comme  $\mu < 0$ , il en résulte que  $\rho > 1$ . Finalement :

$$\exists \rho > 1 \quad : \quad P_{H^2}(f \vee \tilde{h}) = \rho \tilde{h} \quad \text{p.p. sur } \mathbb{T} \setminus K. \quad (55)$$

En introduisant l'opérateur de Toeplitz  $\mathbf{T}$  et en se souvenant (voir fin de la section III-3) que le spectre  $\sigma(\mathbf{T})$  de cet opérateur est égal à  $[0, 1]$ , il en résulte d'après (55) que :

$$\exists \rho > 1 \quad : \quad \tilde{h} = (\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K f),$$

et nous terminons cette démonstration en rappelant que  $\|\tilde{h}\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = C$ .  $\square$

### III-4.2 Calcul de la meilleure complétion bornée

Pour calculer explicitement la solution  $\tilde{h}$ , il nous faut trouver le réel  $\rho_0 > 1$  tel que :

$$\|(\rho_0 I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K f)\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = C.$$

Nous allons donner un schéma dichotomique pour déterminer cette valeur  $\rho_0$ . Pour cela, posons :

$$\begin{aligned} \Upsilon &: ]1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \rho &\longmapsto \|(\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K f)\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2. \end{aligned}$$

Cette application  $\Upsilon$  peut être considérée comme la composition de l'application qui à tout  $\rho > 1$  associe  $(\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K f)$  dans  $H^2$  et dont la dérivée au point  $\rho$  vaut  $-(\rho I - \mathbf{T})^{-2} P_{H^2}(\chi_K f)$ , par l'application  $u \mapsto \|u\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2$  définie sur  $H^2$  et dont la différentielle au point  $u$  est donnée en tout point  $v$  de  $H^2$  par :  $2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}$ . Il en résulte que l'application  $\Upsilon$  est différentiable et que :

$$\frac{d\Upsilon}{d\rho} = 2 \operatorname{Re} \langle (\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K f), -(\rho I - \mathbf{T})^{-2} P_{H^2}(\chi_K f) \rangle_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}. \quad (56)$$

Par ailleurs, rappelons que l'opérateur  $(\rho I - \mathbf{T})^{-1}$ , inverse de l'opérateur positif  $\rho I - \mathbf{T}$ , est lui même positif pour  $\rho > 1$ . Par conséquent, il résulte de l'équation (56) que  $\frac{d\Upsilon}{d\rho} < 0$  et que l'application  $\Upsilon$  est ainsi décroissante.

Pour déterminer les limites de  $\Upsilon$  en 1 et  $\infty$ , remarquons d'une part, que l'égalité  $(\rho I - \mathbf{T})^{-1} = \frac{1}{\rho} (I - \frac{1}{\rho} \mathbf{T})^{-1}$  implique que  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho I - \mathbf{T})^{-1} = 0$  et par conséquent :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Upsilon(\rho) = 0.$$

D'autre part,  $(\rho I - \mathbf{T})^{-1}$  est nécessairement non borné quand  $\rho \rightarrow 1^+$ . En effet, posons

$$\forall \rho > 1 : h_\rho = (\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K f)$$

et supposons au contraire que  $\Upsilon(\rho)$  reste borné quand  $\rho \rightarrow 1^+$ . Compte tenu des égalités suivantes

$$\|h_\rho\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2 = \Upsilon(\rho) \quad \text{et} \quad P_{H^2}(f \vee h_{\rho|_{\mathbb{T} \setminus K}}) = (\rho - 1) h_\rho,$$

il résulte que

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^+} \|h_\rho\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2 < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow 1^+} P_{H^2}(f \vee h_{\rho|_{\mathbb{T} \setminus K}}) = 0.$$

Par conséquent la famille  $(f \vee h_{\rho|_{\mathbb{T} \setminus K}})$  reste bornée dans  $L^2(\mathbb{T})$  et converge vers une fonction de  $H^2$  quand  $\rho \rightarrow 1^+$ ; ceci contredit l'hypothèse  $f \notin H_{|K}^2$ . Ainsi

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^+} \Upsilon(\rho) = \infty.$$

Finalement, nous avons établi le résultat suivant :

**Lemme 9** *L'application  $\Upsilon$  est continue et décroissante de  $]1, \infty[$  sur  $]0, \infty[$ .*

Nous en déduisons que pour toute constante positive  $C$ , il existe un unique réel  $\rho_0$  dans  $]1, \infty[$  tel que le vecteur  $\tilde{h} = (\rho_0 I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K f)$  soit de norme égale à  $C$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . De plus cette valeur  $\rho_0$  de  $\rho$  peut être calculée par dichotomie sur l'application  $\Upsilon$ . Il n'est pas nécessaire d'inverser pour chaque  $\rho$  l'opérateur  $(\rho I - \mathbf{T})^{-1}$ , mais qu'il nous suffit simplement de résoudre l'équation linéaire suivant :

$$(\rho I - \mathbf{T}) h_\rho = P_{H^2}(\chi_K f), \tag{57}$$

puis de remarquer que :

$$\Upsilon(\rho) = \|h_\rho\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2. \tag{58}$$

Le calcul approché de la solution  $\tilde{h}$  du problème (45) se fera par la résolution d'une famille de systèmes linéaires dont les matrices sont de Toeplitz.

**Remarque 2** L'équation (48) n'est pas sans rappeler la relation :

$$g_\lambda = \lambda (I + \lambda S)^{-1} S f \tag{59}$$

donnée dans [60, page-619] pour reconstruire une fonction  $f$  de  $H^2$  à partir de sa restriction sur le sous-ensemble  $K$  de  $\mathbb{T}$ . En effet, en posant  $\lambda = \frac{1}{\rho-1}$  nous passons sans difficulté de l'équation (48) à l'équation (59).



### III-5 Lien entre les problèmes extrémaux bornés et les problèmes de complétion bornés dans $H^2$

Nous supposerons dans cette section III-5 que  $h \in H^2$ .

Rappelons d'abord le problème extrémal borné suivant étudié en III-3 :

$$\|f - \hat{g}\|_{L^2(K)} = \min_{g \in B_{M,h}^2} \|f - g\|_{L^2(K)}. \quad (60)$$

Pour étudier ce problème, nous avons démontré que pour tout  $\lambda > -1$ , la fonction  $g_\lambda$  définie par :

$$g_\lambda = g_\lambda(f, h) = h + (1 + \lambda \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K(f - h)), \quad (61)$$

est la solution du problème extrémal borné suivant :

$$\|f - g_\lambda\|_{L^2(K)} = \min_{g \in B_{\sqrt{\mathcal{M}(\lambda)}, h}^2} \|f - g\|_{L^2(K)}. \quad (62)$$

où  $\mathcal{M}$ , rappelons-le, est la fonction continue et strictement décroissante définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : ]-1, \infty[ &\longrightarrow ]0, \infty[ \\ \lambda &\longmapsto \|(1 + \lambda \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K(f - h))\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute constante positive  $M$ , la solution  $\hat{g}$  du problème (60) est donnée par :

$$\hat{g} = g_{\lambda_0} \quad \text{avec} \quad \lambda_0 = \mathcal{M}^{-1}(M^2). \quad (63)$$

Par ailleurs, considérons le problème de complétion suivant, version *a priori* plus générale du problème 2 dans le cas hilbertien  $p = 2$  :

**Problème 3** Si  $\mathcal{F}_{C,h}^2$  désigne l'ensemble :

$$\mathcal{F}_{C,h}^2 = \{u \in L^2(\mathbb{T} \setminus K) : \|u - h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} \leq C\},$$

trouver une fonction  $\tilde{h} \in \mathcal{F}_{C,h}^2$  telle que :

$$\text{dist}(f \vee \tilde{h}, H^2) = \inf_{u \in \mathcal{F}_{C,h}^2} \text{dist}(f \vee u, H^2). \quad (64)$$

Mais puisque d'une part :

$$\mathcal{F}_{C,h}^2 + h = \mathcal{F}_{C,0}^2 = \mathcal{F}_C^2,$$

et que d'autre part :

$$\text{dist}(f \vee u, H^2) = \text{dist}(f \vee u - h, H^2) = \text{dist}((f - h) \vee (u - h), H^2),$$

alors

$$\inf_{u \in \mathcal{F}_{C,h}^2} \text{dist}(f \vee u, H^2) = \inf_{u-h \in \mathcal{F}_C^2} \text{dist}((f - h) \vee (u - h), H^2).$$

Il en résulte que le problème (3) précédent admet une solution  $\tilde{h}$  donnée par :

$$\tilde{h} - h = (\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K(f - h)),$$

pour un réel  $\rho > 1$  tel que  $\|\tilde{h} - h\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = C$ . Plus généralement, pour tout réel  $\rho > 1$ , la fonction  $\tilde{h}_\rho$  définie par :

$$\tilde{h}_\rho = \tilde{h}_\rho(f, h) = h + (\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K(f - h)), \quad (65)$$

est la solution du problème de la complétion analytique borné suivant :

$$\text{dist}(f \vee \tilde{h}_\rho, H^2) = \min_{u \in \tilde{B}^2_{\sqrt{\tilde{Y}(\rho)}, h}} \text{dist}(f \vee u, H^2), \quad (66)$$

où  $\tilde{Y}$  est la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{Y} : ]1, \infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \rho &\longmapsto \|(\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K(f - h))\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}^2. \end{aligned}$$

Une démonstration en tout point analogue à celle du lemme 9 nous permet d'affirmer le résultat suivant :

**Lemme 10** *L'application  $\tilde{Y}$  est continue et strictement décroissante de  $]1, \infty[$  sur  $]0, \infty[$ .*

Ainsi, pour toute constante positive  $C$ , la solution  $\tilde{h}$  du problème (3) est donnée par :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_{\rho_0} \quad \text{pour} \quad \rho_0 = \tilde{Y}^{-1}(C^2) \quad (67)$$

Le proposition suivante nous permet d'établir des équivalences entre les problèmes (60) et (64) ainsi qu'entre leurs solutions respectives (63) et (67). En effet, en remarquant que, pour tout  $\rho > 1$  et pour tout  $-1 < \lambda < 0$ , nous avons respectivement :

$$\mathcal{M}(-1/\rho) = \rho^2 \tilde{Y}(\rho), \quad \tilde{Y}(-1/\lambda) = \lambda^2 \mathcal{M}(\lambda),$$

et

$$g_{\frac{-1}{\rho}} = h + \rho(\tilde{h}_\rho - h), \quad \tilde{h}_{\frac{-1}{\lambda}} = -\lambda(g_\lambda - h) + h.$$

alors :

**Proposition 6** *Pour toute constante positive  $C$ , la fonction  $\tilde{h}_{\rho_0}$ , avec  $\rho_0 = \tilde{Y}^{-1}(C^2)$ , est la solution du problème (64) si et seulement si la fonction  $\hat{g} = h + \rho_0(\tilde{h}_{\rho_0} - h)$  est la solution du problème (60) pour  $M = \rho_0 C$ .*

*Réciproquement, pour toute constante positive  $M > \mathcal{M}(0)$ , la fonction  $\hat{g} = g_{\lambda_0}$ , pour  $\lambda_0 = \mathcal{M}^{-1}(M^2)$ , est la solution du problème (60) si et seulement si :  $\tilde{h} = -\lambda_0(g_{\lambda_0} - h) + h$  est la solution du problème (64) pour  $C = -\lambda_0 M$ .*



## Chapitre IV

# Interpolation et approximation robustes

Pour l'identification robuste des systèmes linéaires à partir de données fréquentielles bruitées, les algorithmes robustement convergents, dits à deux étapes, ont été largement popularisés (voir [34, 40, 56, 58]). Si la seconde étape de tels algorithmes peut être réduite à la résolution d'un problème de Nehari, la première étape nécessite une technique d'approximation ou d'interpolation spécifique tenant compte de la nature des données disponibles (densité, perturbations, distribution, ...). La convergence robuste telle qu'elle a été introduite dans [37, 38, 53, 57] quantifie l'exigence que l'algorithme d'approximation reconstruise entièrement la fonction si l'information disponible devient de plus en plus complète (au sens où le nombre de mesures tend vers l'infini et où le niveau du bruit tend vers zéro).

Dans ce chapitre, nous présentons deux techniques d'approximation.

En section IV-1, nous étudions sur un arc du cercle unité, l'approximation polynômiale robuste basée sur le critère des moindres déviations.

En section IV-2, nous généralisons des résultats de Partington concernant l'approximation robuste par les polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin, au cas des points non équi-répartis distribués d'une façon dense sur un sous-ensemble du cercle unité.

Dans la section IV-3, nous indiquons comment ces polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin peuvent être utilisés dans les schémas d'identification robuste  $H^\infty$  ainsi que dans les problèmes d'approximation et de complétion analytique bornée  $H^2$ .

Quelques notations de §IV-1 seront reprises dans §IV-2 pour permettre une lecture séparée des deux schémas proposés.

### IV-1 Approximation par les polynômes de moindre déviation

Pour tout entier naturel  $m$ , nous considérons l'ensemble  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  de  $m$  points dans un ordre croissant sur  $[a, b] \subset [0, 2\pi]$  où  $a$  et  $b$  sont respectivement la limite inférieure de la suite décroissante  $(x_1^{(m)})_{m \geq 1}$  et la limite supérieure de la suite croissante  $(x_m^{(m)})_{m \geq 1}$ .

Soit  $\delta_m = \sup_{1 \leq k \leq m-1} (x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)})$  le saut maximum entre toute paire de points consécutifs de l'ensemble  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$ . Soit  $I$  l'arc du cercle unité  $\mathbb{T}$  défini par :  $I = e^{i[a, b]}$ . Définissons, pour tout  $k$  de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$ , l'élément  $z_k^{(m)}$  de  $I$  par  $z_k^{(m)} = e^{ix_k^{(m)}}$ .

Finalement, Soit  $d$  une fonction non décroissante à valeurs entières telle que, pour tout entier naturel  $m$ ,  $d(m) < m$  et notons  $\mathcal{P}_m$  l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques de degré au plus égal à  $m$ .

### IV-1.1 Les polynômes trigonométriques de moindre déviation

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et soient  $z_1^{(m)}, \dots, z_m^{(m)}$ ,  $m$  points de l'arc  $I$ . Supposons que la fonction  $f$  nous soit donnée par  $m$  valeurs bruitées  $y_k^{(m)} = f(z_k^{(m)}) + \eta_k^{(m)}$  pour  $k = 1, \dots, m$  et notons  $\|\eta^{(m)}\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq m} |\eta_k^{(m)}|$ .

On considère le problème de minimisation suivant : trouver un polynôme de degré au plus  $d(m)$  qui réalise la moindre déviation aux mesures bruitées  $(y_k^{(m)})$  en les points  $z_1^{(m)}, \dots, z_m^{(m)}$  :

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_{d(m)}} \left\{ \sup_{1 \leq k \leq m} |P(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}| \right\}.$$

Si  $Q_m$  est un tel polynôme, nous examinons en outre quand la procédure d'approximation est robustement convergente sur  $I$ , c'est-à-dire quand

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow 0}} \left\{ \sup_{\|\eta^{(m)}\|_\infty \leq \nu} \|Q_m - f\|_{L^\infty(I)} \right\} = 0.$$

Le théorème suivant établit l'existence de  $Q_m$  et fournit un critère de convergence robuste :

**Théorème 6** *Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Avec les notations précédentes, il existe pour tout entier naturel  $m$  un polynôme  $Q_m \in \mathcal{P}_{d(m)}$  tel que :*

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_{d(m)}} \left\{ \sup_{1 \leq k \leq m} |P(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}| \right\} = \sup_{1 \leq k \leq m} |Q_m(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}|. \quad (68)$$

De plus, si  $d(m)$  tend vers l'infini et  $d^2(m)\delta_m$  tend vers zéro lorsque  $m$  tend vers l'infini, alors le polynôme  $Q_m$  converge robustement vers la fonction  $f$  sur  $I$  :

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow 0}} \left\{ \sup_{\|\eta^{(m)}\|_\infty \leq \nu} \|Q_m - f\|_{L^\infty(I)} \right\} = 0. \quad (69)$$

Le reste de la section IV-1 est dédié à la démonstration du théorème précédent. Ceci utilise des inégalités à la Markov pour des polynômes trigonométriques sur des sous-intervalles de  $[0, 2\pi]$ .

### IV-1.2 Les inégalités de Bernstein et de Markov

Dans ce schéma d'approximation, nous utiliserons le fait que les polynômes trigonométriques de degré fixé ne peuvent varier "trop rapidement". Lorsque le domaine sur lequel on considère cette variation est le cercle entier, ceci est quantifié par la classique inégalité de Bernstein (voir par exemple [51, 54, 20]) :

**Théorème 7 (Inégalité de Bernstein)**

*Pour tout polynôme trigonométrique  $T_n$  à coefficients complexes et de degré  $n$ ,*

$$|T_n'(t)| \leq n \|T_n\|_{L^\infty([0, 2\pi])}, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (70)$$

Notre propos est d'établir une inégalité de même type sur des sous-arcs du cercle unité. Pour cela, on utilisera les inégalités classiques de Bernstein et de Markov pour les polynômes algébriques définis sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , qui majorent la norme  $L^\infty$  de la dérivée d'un polynôme en fonction de la norme du polynôme lui-même et de son degré (voir par exemple [51, 54, 20]) :

**Théorème 8 (Inégalité de Bernstein)**

*Pour tout polynôme algébrique  $P_n$  à coefficients complexes et de degré  $n$ ,*

$$|P_n'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|P_n\|_{L^\infty([-1, 1])}, \quad \text{pour } -1 \leq x \leq 1, \quad (71)$$

**Théorème 9** (*Inégalité de Markov*)

Pour tout polynôme algébrique  $P_n$  à coefficients complexes et de degré  $n$ ,

$$|P'_n(x)| \leq n^2 \|P_n\|_{L^\infty([-1,1])}, \quad \text{pour } -1 \leq x \leq 1, \quad (72)$$

Les propositions 7 et 8 suivantes sont des généralisations immédiates au cas d'un sous-intervalle  $I \subset [-1, 1]$ .

**IV-1.2.a Cas des polynômes algébriques**

**Proposition 7** Soit  $I = [a, b]$  (avec  $a < b$ ) un sous-ensemble de  $[-1, 1]$ . Pour tout polynôme algébrique  $P_n$  de degré  $n$  et à coefficients réels ou complexes, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$|P'_n(x)| \leq n^2 \frac{2}{b-a} \|P_n\|_{L^\infty(I)}, \quad a \leq x \leq b, \quad (73)$$

et

$$|P'_n(x)| \leq n \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \|P_n\|_{L^\infty(I)}, \quad a < x < b. \quad (74)$$

**Démonstration de la proposition 7:**

Soit  $P_n$  un polynôme algébrique de degré  $n$ . Soit  $\psi$  la fonction linéaire définie de  $[-1, 1]$  sur  $[a, b]$  et donnée par :

$$\psi(y) = \frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}, \quad \forall y \in [-1, 1],$$

Définissons le polynôme algébrique  $Q_n$  de degré  $n$  sur  $[-1, 1]$  par :

$$Q_n(y) = P_n(\psi(y)), \quad \forall y \in [-1, 1].$$

Il est alors clair que :

$$\|Q_n\|_{L^\infty([-1,1])} = \|P_n\|_{L^\infty([a,b])}.$$

Par différentiation de l'expression de  $P_n$ , nous obtenons :

$$P'_n(x) = \frac{2}{b-a} Q'_n(y), \quad x = \psi(y), \quad x \in [a, b], \quad \forall y \in [-1, 1].$$

La proposition découle immédiatement à présent des inégalités (71) et (72) appliquées à  $Q_n$ .  $\square$

**IV-1.2.b Cas des polynômes trigonométriques**

**Proposition 8** Soit  $I = [a, b]$  (avec  $a < b$ ) un sous ensemble fermé de  $[0, 2\pi]$ .

Soient  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  et  $\theta_4$  quatre éléments de  $[0, \pi]$  tels que  $\cos[a, b] = [\cos\theta_1, \cos\theta_2] \subset [-1, 1]$  et  $\sin[a, b] = [\sin\theta_3, \sin\theta_4] \subset [-1, 1]$ . Pour tout polynôme trigonométrique  $T_n$  à coefficients réels ou complexes et de degré  $n$ , les inégalités suivantes sont vérifiées pour  $a \leq t \leq b$  :

$$|T'_n(t)| \leq n^2 \left( \frac{1}{\sin \frac{\theta_1+\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\theta_3+\theta_4}{2} \sin \frac{\theta_4-\theta_3}{2}} \right) \|T_n\|_{L^\infty(I)}, \quad (75)$$

et

$$|T'_n(t)| \leq \frac{n}{2} \left( \frac{|\sin t| \|T_n\|_{L^\infty(I)}}{\sqrt{\sin \frac{t+\theta_1}{2} \sin \frac{t+\theta_2}{2} \sin \frac{t-\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2-t}{2}}} + \frac{|\cos t| \|T_n\|_{L^\infty(I)}}{\sqrt{\sin \frac{t-\theta_4}{2} \sin \frac{\theta_3-t}{2} \cos \frac{t+\theta_4}{2} \cos \frac{\theta_3+t}{2}}} \right). \quad (76)$$

**Démonstration de la proposition 8 :**

Nous allons obtenir la proposition 8 de la proposition 7 en utilisant les substitutions classiques  $x = \cos t$  et  $y = \sin t$ .

Soit  $P_n$  le polynôme algébrique pair de degré  $n$  défini sur  $[\cos \theta_1, \cos \theta_2]$  par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2} \left( T_n(t) + T_n(-t) \right), \quad \text{avec} \quad x = \cos t, \quad \forall t \in [a, b],$$

et soit  $Q_n$  le polynôme algébrique impair de degré  $n$  défini sur  $[\sin \theta_3, \sin \theta_4]$  par :

$$Q_n(y) = \frac{1}{2} \left( T_n(t) - T_n(-t) \right), \quad \text{avec} \quad y = \sin t, \quad \forall t \in [a, b].$$

Il est alors clair que

$$\|P_n\|_{L^\infty(\cos(I))} \leq \|T_n\|_{L^\infty(I)} \quad \text{et} \quad \|Q_n\|_{L^\infty(\sin(I))} \leq \|T_n\|_{L^\infty(I)},$$

et que la dérivée  $T'_n$  de  $T_n$  est donnée par :

$$T'_n(t) = -\sin t \, P'_n(x) + \cos t \, Q'_n(y), \quad x = \cos t \quad \text{et} \quad y = \sin t \quad \forall t \in [a, b];$$

il en résulte d'une part l'inégalité suivante :

$$|T'_n(t)| \leq \sup_{x \in [\cos \theta_1, \cos \theta_2]} |P'_n(x)| + \sup_{y \in [\sin \theta_3, \sin \theta_4]} |Q'_n(y)|, \quad \forall t \in [a, b].$$

qui, compte tenu de la proposition 7, implique

$$|T'_n(t)| \leq \frac{n^2}{\cos \theta_2 - \cos \theta_1} \|P_n\|_{L^\infty(\cos(I))} + \frac{n^2}{\sin \theta_4 - \sin \theta_3} \|Q_n\|_{L^\infty(\sin(I))}$$

ce qui donne (75) après simplification. D'autre part, nous avons

$$|T'_n(t)| \leq |\sin t| |P'_n(x)| + |\cos t| |Q'_n(y)|, \quad \forall t \in [a, b].$$

qui implique par la proposition 7 que, pour  $a \leq t \leq b$ ,

$$|T'_n(t)| \leq \frac{n |\sin t| \|P_n\|_{L^\infty(\cos(I))}}{2 \sqrt{(\cos t - \cos \theta_1)(\cos \theta_2 - \cos t)}} + \frac{n |\cos t| \|Q_n\|_{L^\infty(\sin(I))}}{2 \sqrt{(\sin t - \sin \theta_4)(\sin \theta_3 - \sin t)}},$$

ce qui, après simplification, termine la démonstration.  $\square$

**IV-1.3 Retour à l'approximation polynômiale robuste**

Introduisons les deux applications suivantes sur  $\mathcal{P}_{d(m)}$  :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{P}_{d(m)} &\longrightarrow [0, \infty[ \\ P &\longmapsto \sup_{1 \leq k \leq m} \left( |P(z_k^{(m)})| \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{P}_{d(m)} &\longrightarrow [0, \infty[ \\ P &\longmapsto \sup_{1 \leq k \leq m} \left( |P(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}| \right). \end{aligned}$$

Démontrons d'abord le lemme suivant qui sera utilisé pour établir la première partie du théorème 6 :

**Lemme 11**

$$\lim_{\|P\|_{L^\infty(I)} \rightarrow \infty} \Gamma(P) = \infty, \quad \lim_{\|P\|_{L^\infty(I)} \rightarrow \infty} \Delta(P) = \infty.$$

**Démonstration du lemme 11 :**

Fixons un entier naturel  $m$ . Puisque d'une part les polynômes de l'ensemble  $\mathcal{P}_{d(m)}$  sont de degré  $d(m) < m$ , la fonction  $\Gamma$  ne s'annule alors qu'en zéro sur  $\mathcal{P}_{d(m)}$  et que d'autre part pour tout polynôme  $P$  de l'ensemble  $\mathcal{P}_{d(m)}$ , nous avons :

$$\Gamma(P) \leq \sup_{z \in I} |P(z)| = \|P\|_{L^\infty(I)}.$$

La fonction  $\Gamma$  est alors continue sur  $\mathcal{P}_{d(m)}$ . Il en résulte que sur l'ensemble compact  $\mathcal{E}_1$  :

$$\mathcal{E}_1 = \{P \in \mathcal{P}_{d(m)}, \|P\|_{L^\infty(I)} = 1\}$$

où  $\Gamma$  ne s'annule jamais, il existe un polynôme  $P_0$  et une constante positive  $\gamma_{min}$  tels que :

$$0 < \gamma_{min} = \min_{P \in \mathcal{E}_1} \Gamma(P) = \Gamma(P_0).$$

Ainsi, pour tout polynôme  $P$  non identiquement nul de  $\mathcal{P}_{d(m)}$ , nous avons

$$\Gamma(P/\|P\|_{L^\infty(I)}) \geq \gamma_{min},$$

Il en résulte que :

$$\forall P \in \mathcal{P}_{d(m)}, \quad \Gamma(P) \geq \gamma_{min} \|P\|_{L^\infty(I)},$$

et nous obtenons finalement :

$$\lim_{\|P\|_{L^\infty(I)} \rightarrow \infty} \Gamma(P) = \infty.$$

Par ailleurs, puisque

$$\Delta(P) = \sup_{1 \leq k \leq m} (|P(z_k^{(m)})| - |y_k^{(m)}|) \geq \Gamma(P) - \sup_{1 \leq k \leq m} (|y_k^{(m)}|),$$

alors nous avons aussi :

$$\lim_{\|P\|_{L^\infty(I)} \rightarrow \infty} \Delta(P) = \infty.$$

et le lemme 11 est ainsi démontré.  $\square$

**Démonstration du théorème 6**

Puisque la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  et que les suites de bruit  $(\eta_k^{(m)})_1^m$ , pour tout  $m$ , sont bornées, alors les suites de mesure  $(y_k^{(m)})_1^m$  sont bornées indépendamment de  $m$ . Par le lemme 11, il existe une constante positive  $C$  telle que

$$\forall P \in \mathcal{P}_{d(m)}, \quad \|P\|_{L^\infty(I)} > C \implies \Delta(P) > \sup_{1 \leq k \leq m} (|y_k^{(m)}|).$$

Ainsi,

$$\inf_{\|P\|_{L^\infty(I)} \leq C} \Delta(P) \leq \Delta(0) = \sup_{1 \leq k \leq m} (|y_k^{(m)}|) \leq \inf_{\|P\|_{L^\infty(I)} > C} \Delta(P)$$

de sorte que :

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_{d(m)}} \Delta(P) = \inf_{\substack{P \in \mathcal{P}_{d(m)} \\ \|P\|_{L^\infty(I)} \leq C}} \Delta(P).$$

Par ailleurs, la fonction  $\Delta$ , définie comme la valeur supérieure sur un ensemble fini de fonctions continues  $P \mapsto |P(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}|$ , est elle-même continue. Nous en déduisons que sur le compact



$\{P \in \mathcal{P}_{d(m)}, \|P\|_{L^\infty(I)} \leq C\}$ , la fonction  $\Delta$  atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme  $Q_m$  élément de  $\mathcal{P}_{d(m)}$  tel que :

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_{d(m)}} \left\{ \sup_{1 \leq k \leq m} |P(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}| \right\} = \sup_{1 \leq k \leq m} |Q_m(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}|.$$

Ceci établit l'équation (68) du théorème 6. Pour démontrer la seconde équation (69), nous commençons par démontrer le lemme suivant :

**Lemme 12** *Si  $\{Q_m\}_{m \geq 1}$  est une suite de polynômes trigonométriques minimisants, c'est-à-dire tel que pour tout entier  $m$  :*

$$\min_{P \in \mathcal{P}_{d(m)}} \left\{ \sup_{1 \leq k \leq m} |P(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}| \right\} = \sup_{1 \leq k \leq m} |Q_m(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}|,$$

alors la suite  $\{Q_m\}_{m \geq 1}$  est bornée dans  $L^\infty(I)$  si  $\{\|\eta^{(m)}\|_\infty\}_{m \geq 1}$  l'est.

**Démonstration du lemme 12 :**

Supposons que la suite  $\{Q_m\}_{m \geq 1}$  ne soit pas bornée dans  $L^\infty(I)$ . Soit  $z = e^{ix}$  un élément de  $I$  tel que  $|Q_m(z)|$  soit maximal. Il existe un entier  $k < m$  pour lequel  $x_k^{(m)} \leq x \leq x_{k+1}^{(m)}$ .

Puisque le polynôme trigonométrique  $Q_m$  est lisse sur  $I$ , nous avons :

$$Q_m(z_k^{(m)}) = Q_m(z) - \int_{z_k^{(m)}}^z Q'_m(\sigma) d\sigma$$

et par la proposition 8, nous obtenons :

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \quad |Q_m(z_k^{(m)})| \geq \left(1 - d^2(m) \delta_m C\right) \|Q_m\|_{L^\infty(I)},$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $m$ .

Comme par hypothèse  $d^2(m) \delta_m$  converge vers zéro quand  $m$  tend vers l'infini, on voit que  $|Q_m(z_k^{(m)})|$  tend vers l'infini avec  $m$  uniformément par rapport à  $k$ , et il en va de même de

$$\sup_{1 \leq k \leq m} |Q_m(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}| \geq \sup_{1 \leq k \leq m} |Q_m(z_k^{(m)})| - \sup_{1 \leq k \leq m} |y_k^{(m)}|.$$

En particulier, on a pour  $m$  assez grand

$$\sup_{1 \leq k \leq m} |Q_m(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}| > \|f\|_\infty + \|\eta^{(m)}\|_\infty \geq \sup_{1 \leq k \leq m} |y_k^{(m)}|,$$

de sorte que le polynôme nul fait mieux que le polynôme  $Q_m$  dans la minimisation (68) ce qui contredit l'optimalité de  $Q_m$ .  $\square$

**Démonstration du théorème 6 (suite)**

Soit  $z = e^{ix}$  un élément de  $I$  et soit  $\epsilon > 0$ . En utilisant l'élément  $z_k^{(m)} = e^{ix_k^{(m)}}$  tel que  $x_k^{(m)} \leq x \leq x_{k+1}^{(m)}$ , écrivons  $f(z) - Q_m(z)$  en trois parties :

$$f(z) - Q_m(z) = \left(f(z) - f(z_k^{(m)})\right) + \left(f(z_k^{(m)}) - Q_m(z_k^{(m)})\right) + \left(Q_m(z_k^{(m)}) - Q_m(z)\right).$$

D'une part, grâce à la continuité de la fonction  $f$  sur  $I$  (et donc à son uniforme continuité), il existe un réel positif  $\alpha$  tel que pour tout  $x$  et  $y$  de  $I$  et tant que  $|x - y| < \alpha$ , nous avons  $|f(x) - f(y)| < \epsilon/3$ .

D'autre part, puisque  $\delta_m \leq d^2(m)$ , alors  $\delta_m$  tend vers zéro quand  $m$  tend vers l'infini. Il en résulte qu'il existe un entier  $m_0$  tel que pour tout  $m \geq m_0$ , nous avons :

$$|f(z) - f(z_k^{(m)})| < \epsilon/3$$

pour tout  $z \in I$  tel que :  $|z - z_k^{(m)}| < \alpha$ .

Finalement, en utilisant la proposition 8 et le lemme 12, nous tirons de

$$|Q_m(z_k^{(m)}) - Q_m(z)| \leq \int_z^{z_k^{(m)}} |Q'_m(\sigma)| d\sigma$$

l'inégalité suivante :

$$|Q_m(z_k^{(m)}) - Q_m(z)| \leq d_m^2 \delta_m C M ,$$

où  $M$  est la constante fournie par le lemme 12 que l'on peut appliquer puisque  $\|\eta^{(m)}\|_\infty$  tend vers zéro.

Grâce au fait que  $d^2(m) \delta_m$  tend vers zéro quand  $m$  tend vers l'infini, il existe un entier  $m_1 \geq m_0$  tel que pour tout  $m > m_1$  nous avons :

$$|Q_m(z_k^{(m)}) - Q_m(z)| < \epsilon/3 .$$

Par ailleurs,

$$|Q_m(z_k^{(m)}) - f(z_k^{(m)})| \leq |Q_m(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}| + |\eta_k^{(m)}| \leq \min_{P \in \mathcal{P}_{d(m)}} \sup_{1 \leq k \leq m} |P(z_k^{(m)}) - y_k^{(m)}| + \|\eta^{(m)}\|_\infty$$

Par conséquent,

$$|Q_m(z_k^{(m)}) - f(z_k^{(m)})| \leq \min_{P \in \mathcal{P}_{d(m)}} \left\{ \sup_{1 \leq k \leq m} |P(z_k^{(m)}) - f(z_k^{(m)})| \right\} + 2 \|\eta^{(m)}\|_\infty .$$

Puisque la fonction  $f$  est continue sur  $I$  et que  $d(m)$  tend vers l'infini avec  $m$ , il existe par le théorème d'approximation de Weierstrass [67, thm.1.1] un entier  $m_2 > m_1$  tel que pour tout  $m > m_2$ , on puisse trouver un polynôme  $P$  dans  $\mathcal{P}_{d(m)}$  pour lequel :  $\|P - f\|_{L^\infty(I)} < \epsilon/3$ . Ainsi :

$$|Q_m(z_k^{(m)}) - f(z_k^{(m)})| \leq \epsilon/3 + 2 \|\eta^{(m)}\|_\infty .$$

Pour résumer, si  $\|\eta^{(m)}\|_\infty \leq \nu$ , alors

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists m_2 \geq 1, \quad \forall m > m_2 : \|f - Q_m\|_{L^\infty(I)} < \epsilon + 2\nu .$$

Ceci achève la démonstration de l'équation (69) du théorème 6.  $\square$

## IV-2 Approximation par les polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin

Pour tout entier naturel  $m$ , on considère l'ensemble  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  de  $m$  points dans un ordre croissant sur  $[0, 2\pi]$  tel que  $(x_1^{(m)})_{m \geq 1}$  soit une suite décroissante tandis que de suite  $(x_m^{(m)})_{m \geq 1}$  est croissante. Posons :

$$I = \left[ \inf_{m \geq 1} x_1^{(m)}, \sup_{m \geq 1} x_m^{(m)} \right] \quad \text{et} \quad \delta_m = \sup_{1 \leq k \leq m-1} \frac{x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)}}{2\pi} .$$

L'intervalle  $I$  est le plus petit compact contenant tous les points  $\{x_k^{(m)}\}_{k=1}^m$  pour toutes les valeurs de  $m$  tandis que  $2\pi\delta_m$  représente, pour chaque valeur de  $m$ , le saut maximum entre deux points consécutifs quelconques de l'ensemble  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$ .

### IV-2.1 Les polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin pour des points non équi-répartis

Soit la fonction continue  $\varphi_m$  linéaire par morceaux sur chacun des intervalles  $]x_k^{(m)}, x_{k+1}^{(m)}[$  pour tout  $k$  de l'ensemble  $\{1, \dots, m-1\}$  et vérifiant :

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(2\pi) = 2\pi \quad \text{et} \quad \varphi_m(x_k^{(m)}) = t_k^{(m)},$$

où  $\{t_1^{(m)}, \dots, t_m^{(m)}\}$  sont  $m$  points équi-répartis de l'intervalle  $[0, 2\pi]$  :

$$\varphi_m(x_k^{(m)}) = t_k^{(m)} = t_1^{(m)} + \frac{2\pi(k-1)}{m}, \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (77)$$

**Remarque 3** Dans le cas particulier où les  $m$  points  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  sont exactement égaux aux  $m$  points équi-répartis  $\{t_1^{(m)}, \dots, t_m^{(m)}\}$  avec  $t_1^{(m)} = 0$  alors la fonction  $\varphi_m$  est partout égale à l'identité sur  $[0, 2\pi]$  et l'intervalle  $I$  est simplement le segment  $[0, 2\pi]$ .

Supposons que, pour une fonction intégrable  $f$  sur  $I$ , nous soit donné  $m$  valeurs bruitées  $\{y_k^{(m)}, \dots, y_m^{(m)}\}$  :

$$y_k^{(m)} = f(x_k^{(m)}) + \eta_k^{(m)}, \quad \forall k = 1, \dots, m$$

où  $(\eta_k^{(m)})_{k \geq 0}$  est le bruit de mesure. Notons  $\|\eta^{(m)}\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq m} |\eta_k^{(m)}|$ .

Nous définissons le “polynôme” de Jackson modifié  $\tilde{J}_{n,m}$ , d'ordre  $n$ , associé à la fonction bruitée  $f + \eta$  aux points  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  par :

$$\tilde{J}_{n,m}(x) = \tilde{J}_{n,m}(x, f + \eta) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^{(m)} K_n(\varphi_m(x) - t_k^{(m)}) \quad (78)$$

où  $n$  est un entier naturel plus petit que  $m$  et  $K_n$  est le noyau de Fejér d'ordre  $n$  dont l'expression est donnée plus loin. Naturellement,  $\tilde{J}_{n,m}$  est un polynôme trigonométrique par morceaux seulement de sorte que la dénomination que nous employons est quelque peu abusive, quoique sans danger. De plus, nous définirons le “polynôme” modifié de de la Vallée Poussin  $\tilde{V}_{n,m}$  par une expression analogue à celle utilisée dans [56, §3] pour le polynôme de de la Vallée Poussin classique, et qui peut s'interpréter comme une discrétisation des noyaux de de la Vallée Poussin (voir [83, chap.IV]) :

$$\tilde{V}_{n,m} = \frac{2n+1}{n} \tilde{J}_{2n,m} - \frac{n+1}{n} \tilde{J}_{n,m}. \quad (79)$$

Alors,

**Théorème 10** Soit  $f$  une fonction bornée sur  $I$  (et les notations comme précédemment).

Si  $\delta_m = O(m^{-1})$  alors  $\tilde{J}_{n,m}(x, f + \eta)$  (resp.  $\tilde{V}_{n,m}(x, f + \eta)$ ) converge vers  $f(x)$  en tout point  $x \in I$  de continuité de  $f$  quand  $n$  tend vers l'infini,  $m$  restant toujours plus grand que  $n$  (resp.  $2n$ ), et quand le niveau du bruit  $\nu$  tend vers zéro :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (m > n) \\ \nu \rightarrow 0}} \left\{ \sup_{\|\eta^{(m)}\|_\infty \leq \nu} |\tilde{J}_{n,m}(x, f + \eta) - f(x)| \right\} = 0. \quad (80)$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (m > 2n) \\ \nu \rightarrow 0}} \left\{ \sup_{\|\eta^{(m)}\|_\infty \leq \nu} |\tilde{V}_{n,m}(x, f + \eta) - f(x)| \right\} = 0. \quad (81)$$

De plus, cette convergence est uniforme sur tout intervalle fermé  $[\alpha, \beta] \subset I$  de continuité de  $f$ .

**Remarque 4** Lorsque les points  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  sont équi-répartis sur l'intervalle  $I$ , alors l'hypothèse  $\delta_m = O(m^{-1})$  est vérifiée ( $\delta_m = \frac{1}{m}$  si de plus  $I = [0, 2\pi]$ ). Dans le cas général où les points  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  présentent une distribution quelconque sur l'intervalle  $I$ , cette hypothèse permet d'assurer un recouvrement dense de  $I$  par les suites  $\left(\{x_k^{(m)}\}_{k=1}^m\right)_{m \geq 1}$ .

Le reste de la section est dédié à la démonstration de ce théorème et de quelques résultats auxiliaires. D'abord nous définissons la convolution  $\overset{\varphi}{\bullet}$ , généralisation naturelle de la convolution ordinaire pour traiter des points non équirépartis, puis nous montrerons que la somme  $\tilde{J}_{n,m}$  peut-être considérée comme une discrétisation aux points  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  de l'expression continue  $f \overset{\varphi}{\bullet} K_n$ .

## IV-2.2 Le produit de convolution $\bullet$

Soit  $\Phi$  l'ensemble des fonctions  $\varphi$  continues, linéaires par morceaux, strictement croissantes sur  $[0, 2\pi]$  et vérifiant  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(2\pi) = 2\pi$ . Pour toute fonction  $\varphi$  de l'ensemble  $\Phi$ , nous noterons par  $\dot{\varphi}$  la fonction définie sur  $[0, 2\pi]$  et partout égale à la dérivée à droite de  $\varphi$  sauf au point  $2\pi$  où on l'a défini arbitrairement.

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall x \in [0, 2\pi[ : \quad \dot{\varphi}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x+\epsilon) - \varphi(x)}{\epsilon}$$

Pour toute paire de fonctions intégrables  $f$  et  $g$ , nous définissons le produit de convolution  $f \overset{\varphi}{\bullet} g$  par :

$$\forall x \in [0, 2\pi] : \quad f \overset{\varphi}{\bullet} g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(\varphi(x) - \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt. \quad (82)$$

**Remarque 5** Dans le cas particulier où la fonction  $\varphi$  est partout égale à l'identité  $Id_{[0, 2\pi]}$  sur  $[0, 2\pi]$ , sa dérivée symétrique  $\dot{\varphi}$  est identiquement égale à la fonction constante  $1_{[0, 2\pi]}$  sur  $[0, 2\pi]$ . Dans ce cas, la relation (82) est simplement le produit de convolution classique.

D'une manière plus générale, nous avons la relation suivante reliant les deux produits de convolution  $\overset{\varphi}{\bullet}$  et  $*$  :

$$\forall x \in [0, 2\pi] : \quad f \overset{\varphi}{\bullet} g(x) = ((f \circ \varphi^{-1} * g) \circ \varphi)(x). \quad (83)$$

Par ailleurs, rappelons (voir [26, §3.2.1]) qu'une suite  $(K_n)_{n=1}^\infty$  de fonctions positives et intégrables est dite une approximation de l'identité ou encore un noyau positif si et seulement si cette suite vérifie :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t) dt = 1 \\ (ii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(t) dt = 0, \forall \delta \in ]0, \pi[. \end{aligned} \quad (84)$$

Rappelons la propriété fondamentale suivante (voir [26, §3.2.2]) qui justifie l'appellation d'approximation de l'identité attribuée aux suites  $(K_n)_{n=1}^\infty$  vérifiant les propriétés (i) et (ii) de (84) :

**Proposition 9** Si  $(K_n)_{n \geq 1}$  est une approximation de l'identité au sens de la convolution  $*$  alors pour toute fonction  $f$  continue sur  $[0, 2\pi]$ , la suite  $(f * K_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 2\pi]$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f * K_n\|_{L^\infty([0, 2\pi])} = 0. \quad (85)$$

Nous allons montrer qu'une propriété similaire à (85) est aussi vérifiée par le produit de convolution  $\overset{\varphi}{\bullet}$  pour toute fonction  $\varphi$  de l'ensemble  $\Phi$  et ceci grâce à la propriété (83) reliant les deux produits de convolution  $\overset{\varphi}{\bullet}$  et  $*$ .

Soit  $\varphi$  une fonction quelconque de l'ensemble  $\Phi$ . La fonction  $\varphi^{-1}$ , inverse de la fonction continue et croissante  $\varphi$ , est elle-même continue sur  $[0, 2\pi]$ . Pour toute fonction continue  $f$  sur  $[0, 2\pi]$ , sa composée  $f \circ \varphi^{-1}$  par  $\varphi^{-1}$  est aussi continue sur  $[0, 2\pi]$ . Si  $(K_n)_{n=1}^{\infty}$  est une approximation de l'identité au sens de la convolution  $*$  alors, par la propriété (85), la suite  $f \circ \varphi^{-1} - f \circ \varphi^{-1} * K_n$  converge uniformément vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. La suite  $(f \circ \varphi^{-1} - f \circ \varphi^{-1} * K_n) \circ \varphi$  converge donc uniformément vers zéro et la relation (83) nous permet de conclure :

**Proposition 10** *Pour toute fonction  $\varphi$  de l'ensemble  $\Phi$ , et pour tout noyau positif  $(K_n)_{n \geq 1}$ , si  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 2\pi]$  alors la suite  $(f \overset{\varphi}{\bullet} K_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 2\pi]$  :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f \overset{\varphi}{\bullet} K_n\|_{L^\infty([0, 2\pi])} = 0. \quad (86)$$

Nous pourrions introduire directement la notion d'approximation de l'identité au sens de la convolution  $\overset{\varphi}{\bullet}$  en disant qu'une suite  $(K_n)_{n=1}^{\infty}$  de fonctions positives et intégrables est une approximation de l'identité au sens de la convolution  $\overset{\varphi}{\bullet}$  (ou simplement un  $\varphi$ -noyau positif) si et seulement si cette suite vérifie :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt = 1 \\ (ii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt = 0, \forall \delta \in ]0, \pi[. \end{aligned} \quad (87)$$

Cette notion cependant est sans intérêt comme le montre le lemme élémentaire suivant

**Lemme 13** *Une suite de fonctions positives  $(K_n)_{n=1}^{\infty}$  est une approximation de l'identité au sens de la convolution  $*$  si et seulement si la suite  $(K_n)_{n=1}^{\infty}$  est une approximation de l'identité au sens de la convolution  $\overset{\varphi}{\bullet}$  pour un (et donc tout)  $\varphi$  élément de  $\Phi$ .*

### Démonstration du lemme 13

Soit  $\varphi$  un élément de l'ensemble  $\Phi$ . Puisque d'une part :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2\pi)} K_n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(\theta) d\theta,$$

les parties (i) des définitions (84) et (87) sont équivalentes.

Par ailleurs, pour tout  $\delta$  de l'intervalle  $]0, 2\pi[$ , si

$$\zeta = \min(\delta, \varphi(\delta), 2\pi - \varphi(2\pi - \delta)) \quad \text{et} \quad \eta = \max(\delta, \varphi(\delta), 2\pi - \varphi(2\pi - \delta))$$

alors

$$\int_\eta^{2\pi-\eta} K_n(\theta) d\theta \leq \int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt = \int_{\varphi(\delta)}^{\varphi(2\pi-\delta)} K_n(\theta) d\theta \leq \int_\zeta^{2\pi-\zeta} K_n(\theta) d\theta.$$

Ces dernières inégalités établissent l'équivalence des propriétés (ii) dans les définitions (84) et (87).

□

## IV-2.2.a Les noyaux de Dirichlet et de Fejér

Soit  $\varphi$  une fonction quelconque de l'ensemble  $\Phi$ . Soit  $L^2([0, 2\pi], \dot{\varphi})$  l'espace des fonctions de carré-intégrable sur  $[0, 2\pi]$  par rapport à la mesure  $\dot{\varphi}(t) dt$  (voir [83, §I.3]).

Pour tout entier relatif  $n$ , définissons la fonction  $\omega_n$  à valeurs complexes sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  par :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad : \quad \omega_n(t) = e^{in\varphi(t)}.$$

Puisque

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_n(t) \overline{\omega_m(t)} \dot{\varphi}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi(t)} \dot{\varphi}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\tau} d\tau = \delta_{n,m}$$

où  $\delta_{n,m}$  désigne le symbole de Kronecker, le système  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthonormal dans l'espace  $L^2([0, 2\pi], \dot{\varphi})$ .

Par ailleurs, désignons par  $D_n$  le noyau de Dirichlet d'ordre  $n$  défini par :

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = \frac{\sin((n+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}, \quad (88)$$

et par  $K_n$  le noyau de Fejér d'ordre  $n$  donné par :

$$K_n(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(\theta) = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \right\}^2. \quad (89)$$

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[0, 2\pi]$ . Alors, pour tout entier relatif  $n$ , notons par  $\hat{f}(n)$  le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  de  $f$  dans le système orthonormal  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-in\varphi(t)} \dot{\varphi}(t) dt. \quad (90)$$

Si  $S_n f(x)$  désigne la somme  $\sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ik\varphi(x)}$ , alors grâce aux relations (90) et (88), le calcul suivant :

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(\varphi(x)-\varphi(t))} \dot{\varphi}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(\varphi(x) - \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt$$

montre que :

$$S_n f = f \overset{\varphi}{\bullet} D_n. \quad (91)$$

Par ailleurs, si  $\sigma_n f(x)$  désigne la somme  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x)$ , alors les relations (90) et (89) impliquent :

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f \overset{\varphi}{\bullet} D_k(x) = f \overset{\varphi}{\bullet} \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) \right\},$$

soit finalement :

$$\sigma_n f = f \overset{\varphi}{\bullet} K_n. \quad (92)$$

**Remarque 6** Lorsque la fonction  $\varphi$  est identiquement égale à l'identité  $Id_{[0, 2\pi]}$  sur  $[0, 2\pi]$ , alors les relations (91) et (92) se réduisent aux relations bien connues suivantes (voir [26, chap.5]) :

$$S_n f = f * D_n \quad \text{et} \quad \sigma_n f = f * K_n.$$

Reprenons l'expression (89) du noyau de Fejér  $K_n$  d'ordre  $n$  :

$$K_n(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k e^{il\theta} = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \right\}^2.$$

Il est alors clair que le polynôme trigonométrique  $K_n$  est de degré  $n$  et s'annule  $n$  fois aux points  $\frac{2\pi k}{n+1}$  pour tout entier  $k$  élément de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ . De plus, sa dérivée  $K'_n$  est donnée par :

$$K'_n(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \equiv 0[2\pi] \\ \frac{(n+1) \cos(\frac{n+1}{2}\theta) \sin(\frac{1}{2}\theta) - \sin(\frac{n+1}{2}\theta) \cos(\frac{1}{2}\theta)}{\sin^2(\frac{1}{2}\theta)} \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, la dérivée  $K'_n$  s'annule  $n+1$  fois aux points  $\frac{2\pi k}{n+1}$  pour tout entier  $k$  de l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$ .

Par ailleurs, observons que pour toute  $\tau$ , le terme constant du polynôme  $K_n(\theta + \tau)$  est égal à 1. Par le lemme 14 suivant, nous obtenons que pour toute constante  $\tau$  et pour tous entiers  $m$  et  $n$ ,  $m$  restant plus grand que  $n$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(\theta + \tau) d\theta = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} K_n\left(\frac{2\pi k}{m} + \tau\right) = 1. \quad (93)$$

**Lemme 14** Pour tout polynôme  $P$  de degré  $n$  strictement plus petit que  $m$  et pour toute constante  $\tau$ , le terme constant dans l'expression de  $P(\theta + \tau)$  est donné par :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta + \tau) d\theta = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} P\left(\frac{2\pi k}{m} + \tau\right). \quad (94)$$

#### Démonstration du lemme 14

Soit  $P(\theta) = \sum_{j=-n}^n \alpha_j e^{ij\theta}$  un polynôme trigonométrique de degré  $n$  et soit  $\tau$  une constante quelconque. Observons d'abord que le terme constant  $\alpha_0$  est donné par :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta + \tau) d\theta.$$

Par ailleurs, pour tout entier  $m > n$ , le calcul suivant :

$$\sum_{k=0}^{m-1} P\left(\frac{2\pi k}{m} + \tau\right) = m \alpha_0 + \sum_{|j|=1}^n \alpha_j e^{ij\tau} \sum_{k=0}^{m-1} \left(e^{i \frac{2\pi k}{m}}\right)^j = m \alpha_0 + \sum_{|j|=1}^n \alpha_j e^{ij\tau} \sum_{k=0}^{m-1} e^{i \frac{2\pi j}{m} k} = m \alpha_0,$$

achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 7** La combinaison de la relation (93), du fait que  $K_n \geq 0$  et de la propriété suivante :

$$\forall \delta \in ]0, 2\pi[, \forall \theta \in ]\delta, 2\pi - \delta[ : K_n(\theta) \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(\delta/2)}$$

montre que le noyau de Fejér est une approximation de l'identité au sens de la convolution  $*$ .

**IV-2.2.b Les polynômes de Jackson  $\tilde{J}_{n,m}$  et de de la Vallée Poussin  $\tilde{V}_{n,m}$** 

Reprenons l'expression (78) du polynôme de Jackson  $\tilde{J}_{n,m}(x, f)$  d'ordre  $n$  associé à la fonction intégrable  $f$ , aux  $m$  points  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$ , où  $m$  est un entier plus grand ou égal à  $n$ , et  $\varphi_m \in \Phi$  et satisfaisant (77):

$$\tilde{J}_{n,m}(x) = \tilde{J}_{n,m}(x, f) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(x_k^{(m)}) K_n(\varphi_m(x) - t_k^{(m)}).$$

**Remarque 8** Dans cette sous-section IV-2.2.b, il importe peu de savoir si  $f$  désigne la fonction initiale  $f$  ou bien la fonction bruitée  $f + \eta$ .

**Remarque 9** Cette définition modifiée étend l'utilisation des polynômes de Jackson  $\tilde{J}$  aux cas des points non équirépartis sur un sous-ensemble  $I$  de l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

**Remarque 10** Le polynôme de Jackson  $\tilde{J}$  associé à la fonction  $f$  aux points non-équi-répartis  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  est relié au polynôme classique de Jackson  $J$  associé à la fonction  $f \circ \varphi_m^{-1}$  aux points équi-répartis  $\{t_1^{(m)}, \dots, t_m^{(m)}\}$  par la relation :

$$\tilde{J}_{n,m}(x, f) = J_{n,m}(t, f \circ \varphi_m^{-1}), \quad \text{où } \varphi_m(x) = t \quad \forall t \in [0, 2\pi]. \quad (95)$$

Notons que lorsque  $m = n + 1$ , le polynôme  $\tilde{J}_{n,n+1}(x, f)$  coïncide avec  $f$  aux points  $\{x_1^{(n+1)}, \dots, x_{n+1}^{(n+1)}\}$  et que ces derniers peuvent ne pas être équi-répartis alors que la définition du polynôme classique de Jackson exige l'équi-répartition de ces points (voir [83, chap.X.6]).

Dans la réunion d'ouverts  $\bigcup_{k=1}^n ]x_k^{(n+1)}, x_{k+1}^{(n+1)}[$ , la dérivée  $\tilde{J}'_{n,n+1}(x, f)$  du polynôme de Jackson est donnée par :

$$\tilde{J}'_{n,n+1}(x, f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k^{(n+1)}) K'_n(\varphi_{n+1}(x) - t_k^{(n+1)}) \varphi'_{n+1}(x).$$

Puisque  $K'_n$  s'annule aux points  $\frac{2\pi k}{n+1}$ , pour  $k = 0, \dots, n$  et que  $\varphi_{n+1}$  est continue et linéaire par morceaux, la dérivée  $\tilde{J}'_{n,n+1}(x, f)$  peut être prolongée continûment à l'ensemble  $\{x_1^{(n+1)}, \dots, x_{n+1}^{(n+1)}\}$  avec la valeur zéro. L'annulation de la dérivée  $\tilde{J}'_{n,n+1}(x, f)$  aux points  $\{x_1^{(n+1)}, \dots, x_{n+1}^{(n+1)}\}$  assure un certain lissage du polynôme interpolant  $\tilde{J}_{n,n+1}(x, f)$ , mais nous considérerons le cas général des polynômes  $\tilde{J}_{n,m}(x, f)$ .

Par ailleurs, puisque

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2\pi} \frac{t_{k+1}^{(m)} - t_k^{(m)}}{x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)}} (x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)}) = \frac{1}{2\pi} \dot{\varphi}(x_k^{(m)}) (x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)})$$

alors le polynôme de Jackson  $\tilde{J}_{n,m}(x, f)$  est aussi égal à :

$$\tilde{J}_{n,m}(x, f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m f(x_k^{(m)}) K_n(\varphi_m(x) - \varphi_m(x_k^{(m)})) \dot{\varphi}(x_k^{(m)}) (x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)}).$$

Ainsi, la somme  $\tilde{J}_{n,m}$  peut être considérée comme une discrétisation de  $f \circledast K_n$  aux  $m$  points



$\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  et le théorème 10 peut être considéré comme la version discrète de la proposition 10.

La proposition suivante résume les propriétés principales des polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin modifiés que nous utiliserons pour l'approximation robuste. Celles-ci sont évidemment des extensions aisées de résultats bien connus pour les polynômes classiques.

**Proposition 11** *Soit  $f$  une fonction bornée sur  $I$ . Alors,*

1. *Si  $m > n$  et  $M_1 \leq f \leq M_2$  alors  $M_1 \leq \tilde{J}_{n,m}(x, f) \leq M_2$ .*

2. *Supposons maintenant  $m > 2n$ . Le polynôme  $\tilde{V}_{n,m}(x, f)$  vérifie :*

$$\|\tilde{V}_{n,m}(f)\|_{L^\infty(I)} \leq (3 + 2/n) \|f\|_{L^\infty(I)}. \quad (96)$$

*De plus,  $\tilde{V}_{n,m}(p \circ \varphi_m) = p \circ \varphi_m$  pour tout polynôme  $p$  de degré au plus égal à  $n$ .*

*Par ailleurs,*

$$\|\tilde{V}_{n,m}(f) - f\|_{L^\infty(I)} \leq (4 + 2/n) E_n(f, \varphi_m),$$

*où  $E_n(f, \varphi_m) = \inf \{\|f - p \circ \varphi_m\|_{L^\infty(I)} : p \text{ un polynôme de degré } n\}$ .*

### Démonstration de la proposition 11

Puisqu'une fonction constante est égale à son polynôme de Jackson pour  $m > n$  par (93), la première partie de la proposition 11 se ramène, par différence, à constater que le polynôme de Jackson d'une fonction non négative est non négatif ce qui est évident puisque  $K_n \geq 0$ .

L'inégalité (96) est une conséquence immédiate de 1 et de la définition de  $\tilde{V}_{n,m}$ .

Maintenant si nous remplaçons dans la définition (78) du polynôme de Jackson, le noyau de Fejér puis celui de Dirichlet par leurs expressions (89) et (88), nous obtenons :

$$\tilde{J}_{n,m}(x, f) = \frac{1}{m(n+1)} \sum_{k=0}^n \sum_{p=-k}^k e^{ip\varphi_m(x)} \sum_{r=1}^m f(x_r^{(m)}) e^{-ip\varphi_m(x_r^{(m)})}.$$

Dans le cas particulier où  $f(\theta) = e^{i\alpha\varphi_m(\theta)}$  avec  $|\alpha| \leq n$ , nous avons :

$$\tilde{J}_{n,m}(x, e^{i\alpha\varphi_m}) = \frac{1}{m(n+1)} \sum_{k=0}^n \sum_{p=-k}^k e^{ip\varphi_m(x)} \sum_{r=0}^{m-1} \left\{ e^{i\frac{2\pi}{m}(\alpha-p)r} \right\}^r.$$

Puisque  $|\alpha - p| < m$  par hypothèse, la somme précédente se ré-écrit

$$\frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^n \sum_{p=-k}^k e^{ip\varphi_m(x)} \delta_{\alpha,p} = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=|\alpha|}^n e^{i\alpha\varphi_m(x)}$$

de sorte que :

$$\tilde{J}_{n,m}(x, e^{i\alpha\varphi_m}) = \frac{n+1-|\alpha|}{n+1} e^{i\alpha\varphi_m(x)} \quad \text{et} \quad \tilde{J}_{2n,m}(x, e^{i\alpha\varphi_m}) = \frac{2n+1-|\alpha|}{2n+1} e^{i\alpha\varphi_m(x)}.$$

Ainsi  $\tilde{V}_{n,m}(e^{i\alpha\varphi_m}) = e^{i\alpha\varphi_m}$  au vu de la définition et il s'ensuit par linéarité :

$$\forall p \in \mathcal{P}_n : \quad \tilde{V}_{n,m}(p \circ \varphi_m) = p \circ \varphi_m.$$

Enfin, en utilisant (96), on a pour  $p \in \mathcal{P}_n$

$$\|\tilde{V}_{n,m}(f) - f\|_{L^\infty(I)} = \|\tilde{V}_{n,m}(f - p \circ \varphi_m) - (f - p \circ \varphi_m)\|_{L^\infty(I)} \leq (4 + 2/n) \|f - p \circ \varphi_m\|_{L^\infty(I)},$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

### IV-2.3 Convergence robuste des polynômes $\tilde{J}_{n,m}$ et $\tilde{V}_{n,m}$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 10.

Supposons que  $|f| \leq M$  sur  $I$  et que la fonction  $f$  soit continue en un point  $x$  de l'intervalle  $I$ . Étant donné un réel  $\zeta > 0$ , il existe un réel  $\kappa > 0$ , fonction de  $x$  et de  $\zeta$ , tel que  $|f(y) - f(x)| \leq \zeta/2$  pour tout  $y \in I$  vérifiant  $|y - x| \leq \kappa$ .

Par ailleurs, il existe un entier  $m_0$  tel que pour tout  $m > m_0$ , l'intervalle  $I_m = [x_1^{(m)}, x_m^{(m)}]$  contient le point  $x$ . La relation (93) nous permet d'écrire  $\tilde{J}_{n,m}$  d'une manière équivalente sous la forme :

$$\tilde{J}_{n,m}(x) - f(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (f(x_k^{(m)}) + \eta_k^{(m)} - f(x)) K_n(\varphi_m(x) - t_k^{(m)}) = A + B + C,$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  désignent respectivement :

$$A = \frac{1}{m} \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ |x - x_k^{(m)}| \leq \kappa}} \left\{ (f(x_k^{(m)}) - f(x)) K_n(\varphi_m(x) - t_k^{(m)}) \right\},$$

$$B = \frac{1}{m} \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ |x - x_k^{(m)}| > \kappa}} \left\{ (f(x_k^{(m)}) - f(x)) K_n(\varphi_m(x) - t_k^{(m)}) \right\}$$

et

$$C = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq k \leq m} \left\{ \eta_k^{(m)} K_n(\varphi_m(x) - t_k^{(m)}) \right\}.$$

D'abord, dû au choix de  $\kappa$  et grâce à (93), nous avons :

$$|A| \leq \frac{\zeta}{2} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m K_n(\varphi_m(x) - t_k^{(m)}) = \zeta/2.$$

D'autre part, puisque  $\|\eta^{(m)}\|_\infty \leq \nu$  et toujours grâce à (93) il est clair que

$$|C| \leq \nu.$$

Par ailleurs, associons à la fonction  $\varphi_m$ , la grandeur  $\Delta_m$  définie par :

$$\Delta_m = \min_{\substack{y_1, y_2 \in I_m \\ |y_1 - y_2| > \kappa}} |\varphi_m(y_1) - \varphi_m(y_2)|.$$

Puisque  $\varphi_m$  est monotone et linéaire par morceaux, alors

$$\Delta_m \geq \kappa \min_{1 \leq k \leq m-1} \frac{\varphi_m(x_{k+1}^{(m)}) - \varphi_m(x_k^{(m)})}{x_{k+1}^{(m)} - x_k^{(m)}} = \kappa \frac{1}{m \delta_m}.$$

Étant donné que, par hypothèse  $\delta_m = O(m^{-1})$ , il existe alors un entier  $m_1 > m_0$  tel que :

$$\forall m > m_1, \quad \Delta_m > \gamma$$

pour une certaine constante  $\gamma > 0$ .

Compte-tenu du fait que le noyau de Fejér  $K_n$  vérifie pour tout  $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{|t| \geq \alpha} K_n(t) \right\} = 0,$$

il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout entier  $n > n_0$  et pour tout  $y \geq \Delta_m > \gamma$ , nous avons  $K_n(y) \leq \frac{\zeta}{2M}$ . Il en résulte que pour tous entiers  $n > n_0$  et  $m > m_1$ ,  $m$  restant plus grand que  $n$ ,

$$|B| \leq 2M \frac{1}{m} \sum_{1 \leq k \leq m} K_n(\varphi_m(x) - t_k^{(m)}) \leq \zeta/2.$$

Finalement,

$$|\tilde{J}_{n,m}(x) - f(x)| \leq |A| + |B| + |C| < \zeta + \nu.$$

Pour terminer la démonstration de la première partie du théorème, remarquons que si  $f$  est continue sur un compact  $[\alpha, \beta]$  de l'intervalle  $I$ , alors  $\kappa$  et  $\gamma$  peuvent être choisis indépendamment de  $x$  et la démonstration précédente montre que  $\tilde{J}_{n,m}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[\alpha, \beta]$ .

Pour démontrer la dernière partie du théorème, notons simplement que la relation :

$$f - \tilde{V}_{n,m} = \frac{2n+1}{n}(f - \tilde{J}_{2n,m}) - \frac{n+1}{n}(f - \tilde{J}_{n,m}),$$

nous permet de conclure en utilisant la première partie du théorème 10.  $\square$

#### IV-2.4 L'évaluation numérique de $\tilde{J}_{n,m}$ et de $\tilde{V}_{n,m}$

Reprenons les expressions (78) et (79) des polynômes  $\tilde{J}_{n,m}(x)$  et  $\tilde{V}_{n,m}(x)$  :

$$\tilde{J}_{n,m}(x) = \tilde{J}_{n,m}(x, f + \eta) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^{(m)} K_n(\varphi_m(x) - t_k^{(m)})$$

et

$$\tilde{V}_{n,m} = \frac{2n+1}{n} \tilde{J}_{2n,m} - \frac{n+1}{n} \tilde{J}_{n,m}.$$

Nous allons donner une forme plus simple de ces expressions permettant un calcul efficace et rapide de ces polynômes en tout point de leurs domaines de définition.

Dans l'expression du polynôme de Jackson, remplaçons le noyau de Fejèr, puis celui de Dirichlet respectivement, par leurs expressions (89) et (88); nous obtenons :

$$\tilde{J}_{n,m}(x) = \frac{1}{(n+1)m} \sum_{r=1}^m y_r^{(m)} \sum_{k=0}^n \sum_{p=-k}^k e^{i p (\varphi_m(x) - t_r^{(m)})}$$

Compte tenu de la relation :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{p=-k}^k a^p = (n+1) + \sum_{k=1}^n (n+1-k)(a^k + a^{-k}),$$

nous avons l'expression suivante pour  $\tilde{J}_{n,m}$  :

$$\tilde{J}_{n,m}(x) = \sum_{k=-n}^n e^{i k \varphi_m(x)} \left( \frac{n+1-|k|}{(n+1)m} \sum_{r=1}^m y_r^{(m)} e^{-i k t_r^{(m)}} \right). \quad (97)$$

De la même manière, le polynôme de la Vallée Poussin exprimé sous la forme :

$$\tilde{V}_{n,m}(x) = \frac{1}{n m} \sum_{r=1}^m y_r^{(m)} \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{p=-k}^k e^{i p (\varphi_m(x) - t_r^{(m)})},$$

peut être écrit, compte tenu de la relation :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{p=-k}^k a^p = \sum_{k=n+2}^{2n} (2n+1-k)(a^k + a^{-k}) + n \sum_{k=1}^{n+1} (a^k + a^{-k}) + n,$$

sous la forme suivante :

$$\tilde{V}_{n,m}(x) = \sum_{k=-2n}^{2n} e^{i k \varphi_m(x)} \left( \sum_{r=1}^m v_{n,m}^k y_r^{(m)} e^{-i t_r^{(m)} k} \right) \quad (98)$$

avec

$$v_{n,m}^k = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } 0 \leq |k| \leq n+1 \\ \frac{2n+1-|k|}{nm} & \text{si } n+2 \leq |k| \leq 2n. \end{cases}$$

Ces relations (97) et (98) expriment  $\tilde{J}_{n,m}$  et  $\tilde{V}_{n,m}$  comme des polynômes dans le système orthonormal  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de l'espace  $L^2([0, 2\pi], \dot{\varphi} dt)$ .

Soit  $F$  le vecteur colonne de longueur  $m$  dont le  $r^{i\text{ème}}$  élément est  $y_r^{(m)}$ . Soient  $B^+$  la matrice de type  $(n+1) \times m$  et  $B^-$  la matrice de type  $n \times m$  définies respectivement par :

$$B^+ = \left( \frac{n+1-(k-1)}{(n+1)m} e^{-i(k-1)t_r^{(m)}} \right)_{\substack{1 \leq k \leq n+1 \\ 1 \leq r \leq m}}$$

et

$$B^- = \left( \frac{n+1-k}{(n+1)m} e^{i k t_r^{(m)}} \right)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq r \leq m}}$$

et soient  $V^+$  la matrice  $(2n+1) \times m$  et  $V^-$  la matrice  $2n \times m$  données respectivement par :

$$V^+ = \left( v_{n,m}^{k-1} e^{-i(k-1)t_r^{(m)}} \right)_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ 1 \leq r \leq m}}$$

et

$$V^- = \left( v_{n,m}^k e^{i k t_r^{(m)}} \right)_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ 1 \leq r \leq m}}$$

Si  $A^+(x)$  et  $A^-(x)$  désignent les vecteurs lignes dont les éléments sont des fonctions, de longueurs  $n+1$  et  $n$ , et respectivement donnés par :

$$A^+(x) = (1, \dots, e^{i n \varphi_m(x)}) \quad \text{et} \quad A^-(x) = (e^{-i \varphi_m(x)}, \dots, e^{-i n \varphi_m(x)})$$

et si de plus  $W^+(x)$  et  $W^-(x)$  désignent les vecteurs lignes dont les éléments sont des fonctions, de longueurs  $2n+1$  et  $2n$ , et donnés respectivement par :

$$W^+(x) = (1, \dots, e^{i 2n \varphi_m(x)}) \quad \text{et} \quad W^-(x) = (e^{-i \varphi_m(x)}, \dots, e^{-i 2n \varphi_m(x)})$$

alors les polynômes  $\tilde{J}_{n,m}(x)$  et  $\tilde{V}_{n,m}(x)$  s'expriment sous les formes matricielles suivantes :

$$\tilde{J}_{n,m}(x) = (A^+(x) B^+ + A^-(x) B^-) F \quad (99)$$

et

$$\tilde{V}_{n,m}(x) = (W^+(x) V^+ + W^-(x) V^-) F. \quad (100)$$

Ainsi, l'évaluation de  $\tilde{J}_{n,m}$  et de  $\tilde{V}_{n,m}$  sur un ensemble de points  $\xi_1, \dots, \xi_p$ , peut être formulée comme des produits matricielles dont l'utilisation est fort adaptée pour les calculs numériques principalement sur des machines massivement parallèles. (voir [74]) :

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_{n,m}(\xi_1) \\ \vdots \\ \tilde{J}_{n,m}(\xi_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+(\xi_1) \\ \vdots \\ A^+(\xi_p) \end{pmatrix} B^+ F + \begin{pmatrix} A^-(\xi_1) \\ \vdots \\ A^-(\xi_p) \end{pmatrix} B^- F \quad (101)$$

et

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_{n,m}(\xi_1) \\ \vdots \\ \tilde{V}_{n,m}(\xi_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^+(\xi_1) \\ \vdots \\ W^+(\xi_p) \end{pmatrix} V^+ F + \begin{pmatrix} W^-(\xi_1) \\ \vdots \\ W^-(\xi_p) \end{pmatrix} V^- F. \quad (102)$$

Remarquons que dans l'expression (99), les vecteurs colonnes  $B^+ F$  et  $B^- F$  contiennent les coefficients du polynôme Jackson  $\tilde{J}_{n,m}(x)$  dans le système des bases

$$\{1, \dots, e^{i n \varphi_m(x)}\} \quad \text{et} \quad \{e^{-i \varphi_m(x)}, \dots, e^{-i n \varphi_m(x)}\}$$

tandis que dans l'expression (100), les vecteurs colonnes  $V^+ F$  et  $V^- F$  donnent les coefficients du polynôme  $\tilde{V}_{n,m}(x)$  dans le système des bases

$$\{1, \dots, e^{i 2n \varphi_m(x)}\} \quad \text{et} \quad \{e^{-i \varphi_m(x)}, \dots, e^{-i 2n \varphi_m(x)}\}.$$

Lorsque les points  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  sont équi-répartis sur  $[0, 2\pi]$  c'est-à-dire lorsque  $\varphi_m \equiv Id_{[0, 2\pi]}$  alors le calcul de ces coefficients donne directement les expressions des polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin dans les bases standards  $\{1, e^{i x}, e^{2i x}, \dots\}$  et  $\{e^{-i x}, e^{-2i x}, \dots\}$ .

L'utilisation des facteurs d'atténuation [42, chap.13], permet d'étudier comment ces coefficients sont reliés aux coefficients de Fourier discrets de la fonction  $f$  aux  $m$  valeurs  $\{f(t_1^{(m)}), \dots, f(t_m^{(m)})\}$ .

Lorsque les points d'échantillonnage  $\{x_1^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}\}$  ne sont pas équi-répartis sur  $[0, 2\pi]$ , une étape auxiliaire d'échantillonnage de l'approximant est nécessaire pour revenir aux bases standards.

#### IV-2.5 Retour aux points équi-répartis

Lorsque les valeurs  $(y_k^{(m)})$  ne sont pas données en des points équi-répartis de l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , les polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin sont définis dans la base  $\mathcal{B}_\varphi = \{e^{i n \varphi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  pour une certaine fonction  $\varphi$  de l'ensemble  $\Phi$ . L'utilisation de ces polynômes en identification (pour construire les matrices de Hankel ou de Toeplitz par exemple) exige de disposer d'expressions qui sont de véritables polynômes trigonométriques c'est à dire qui s'expriment dans la base standard  $\{e^{i n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Une façon simple d'obtenir de telles expressions consiste à construire les polynômes *classique* de Jackson et de la Vallée Poussin associés respectivement aux fonctions  $\tilde{J}_{n,m}$  et  $\tilde{V}_{n,m}$  aux points équi-répartis  $\{t_1^{(m)}, \dots, t_m^{(m)}\}$ . Nommons les  $\tilde{J}_{n,m}$  et  $\tilde{V}_{n,m}$ . Pour les calculer, rappelons d'abord l'expression de  $\tilde{J}_{n,m}$

$$\tilde{J}_{n,m}(x) = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{n+1-|k|}{(n+1)m} \sum_{r=1}^m y_r^{(m)} e^{-i t_r^{(m)} k} \right) e^{i \varphi(x) k}$$

et celle de  $\tilde{V}_{n,m}$  :

$$\tilde{V}_{n,m}(x) = \sum_{|k|=0}^{2n} \sum_{r=1}^m v_{n,m}^k y_r^{(m)} e^{i(\varphi(x) - t_r^{(m)}) k} \quad \text{avec} \quad v_{n,m}^k = \begin{cases} \frac{1}{m} & 0 \leq |k| \leq n+1 \\ \frac{2n+1-|k|}{nm} & n+2 \leq |k| \leq 2n. \end{cases}$$

Les polynômes trigonométriques  $\tilde{J}_{n,m}$  et  $\tilde{V}_{n,m}$  sont alors respectivement définis par :

$$\tilde{J}_{n,m}(x) = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{n+1-|k|}{(n+1)m} \sum_{r=1}^m \tilde{J}_{n,m}(t_r^{(m)}) e^{-i k t_r^{(m)}} \right) e^{i x k} \quad (103)$$

$$\tilde{V}_{n,m}(x) = \sum_{p=-2n}^{2n} \left( v_{n,m}^p \sum_{\rho=1}^m \tilde{V}_{n,m}(t_\rho^{(m)}) e^{-i p t_\rho^{(m)}} \right) e^{i p x} \quad (104)$$

et sont exprimés dans la base standard. Le théorème suivant montre que la propriété de la convergence robuste est conservée par les polynômes  $\tilde{J}_{n,m}$  et  $\tilde{V}_{n,m}$  ainsi définis :

**Théorème 11** *Soit  $f$  une fonction bornée sur  $I$ . Soient  $\tilde{J}_{n,m}$  et  $\tilde{V}_{n,m}$  les polynômes définis respectivement par les relations (103) et (104).*

*Si  $\delta_m = O(m^{-1})$ , le polynôme trigonométrique  $\tilde{J}_{n,m}$  (respectivement  $\tilde{V}_{n,m}$ ) converge robustement vers  $f(x)$  en tout point  $x \in I$  de continuité de  $f$  et ceci lorsque le niveau du bruit tend vers zéro et le nombre  $n$  tend vers l'infini,  $m$  restant plus grand que  $n$  (respectivement  $2n$ ). Cette convergence est uniforme sur tout intervalle fermé  $[\alpha, \beta] \subset I$  de continuité de  $f$ .*

**Démonstration du théorème 11 :**

Remarquons d'abord que :

$$f - \tilde{V}_{n,m} = \frac{2n+1}{n} (f - \tilde{J}_{2n,m}) - \frac{n+1}{n} (f - \tilde{J}_{n,m}).$$

Cette remarque nous permet de ne démontrer du théorème 11 que la partie relative au polynôme de Jackson  $\tilde{J}_{n,m}$ . Désignons par  $J_{n,m}$  le polynôme de Jackson classique c'est à dire celui qui est calculé en des points équirépartis. Puisque

$$f - \tilde{J}_{n,m} = (f - J_{n,m}) + (J_{n,m} - \tilde{J}_{n,m}),$$

il suffit de démontrer que chacun des termes tend uniformément vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini,  $m$  restant plus grand que  $n$ . Pour ce qui est du premier, cela découle des propriétés du polynôme de Jackson classique puisqu'il approche uniformément  $f$ . Pour ce qui est du second, cela provient du fait que le polynôme de Jackson n'augmente pas la norme de la fonction à laquelle on l'applique, en l'occurrence  $f - \tilde{J}_{n,m}$  dont nous avons déjà démontré la convergence.  $\square$

**Remarque 11** Ce théorème peut être utilisé pour obtenir un algorithme d'interpolation ou d'approximation en deux étapes. Ce schéma d'interpolation est très utile quand les points de mesure ne sont pas équi-répartis ou simplement considérés comme tels par imprécision numérique de mesure. Rappelons que la condition d'équi-répartition des points est primordiale pour le bon comportement des polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin, condition qui ne devrait pas nous surprendre vu l'allure de la courbe de  $K_n$ .

## IV-3 Applications en identification

Dans les problèmes d'identification partielle, robuste dans  $H^\infty$  et aux moindres carrés dans  $H^2$ , à partir de données fréquentielles, les procédures d'interpolation et d'approximation constituent la première étape des algorithmes généralement proposés (voir le chapitre suivant).

Dans  $H^\infty$ , la résolution du problème de Nehari auquel se réduit le problème extrémal borné, fait appel à l'opérateur de Hankel  $\Gamma_u$  de symbole  $u$  où  $u$  est la fonction de  $L^\infty(\mathbb{T})$  à approximer

dans  $H^\infty$ . La méthode standard pour calculer cette solution est de déterminer à partir de la matrice de Hankel  $H_u$  de l'opérateur  $\Gamma_u$ , la plus grande valeur singulière  $\sigma$  de  $H_u$ , qui représente la distance à  $H^\infty$  de la fonction  $u$ , et un vecteur singulier  $x$  associé à  $\sigma$  et qui est de ce fait un vecteur maximisant de  $\Gamma_u$ . Cette matrice  $H_u$  est la matrice de Hankel construite à partir des coefficients de Fourier de la fonction  $u$ .

Dans l'espace réel hilbertien  $L^2(\mathbb{T})$ , la résolution du problème extrémal uniformément borné (33) ainsi que celle du problème de la complétion analytique bornée (45) exigent de pouvoir exprimer pour une fonction donnée, sa restriction sur un arc  $K$  du cercle unité  $\mathbb{T}$ , afin de définir les opérateurs de Toeplitz associés aux fonctions  $\chi_K$  et  $\chi_{\mathbb{T} \setminus K}$  et calculer la norme sur  $\mathbb{T} \setminus K$  d'une fonction  $u \in L^2(\mathbb{T})$  c'est-à-dire la norme sur  $\mathbb{T}$  de sa restriction  $\chi_{\mathbb{T} \setminus K} u$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

Dans les applications pratiques, les fonctions initiales  $f$  et  $h$  (voir chapitre III) ne sont données que par un ensemble fini de leurs valeurs ponctuelles et éventuellement bruitées sur  $K$  et sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Une première étape d'interpolation ou d'approximation est ainsi nécessaire. Dans ce contexte, les polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin trouvent une de leurs utilisations en approximation des fonctions à partir de données ponctuelles.

D'une part, les facteurs d'atténuation, que nous détaillerons en IV-3.1, nous permettent de calculer les coefficients de Fourier discrets pour construire la matrice de Hankel à décomposer pour finalement calculer les valeurs et vecteurs singuliers. D'autre part, la convergence uniforme des ces polynômes  $\tilde{J}$  et  $\tilde{V}$  (ou bien  $\tilde{J}$  et  $\tilde{V}$ , voir section IV-2.5) vers ces fonctions sur tout intervalle fermé des domaines de leur continuité, permet d'exprimer dans IV-3.2, les coefficients de Fourier de la restriction d'une fonction à partir de ceux de la fonction initiale donnée sur tout  $\mathbb{T}$  pour finalement calculer la matrice de Toeplitz et la norme des restriction des fonctions.

Indiquons par ailleurs que le calcul effectif impose de manipuler seulement des matrices et des séries d'ordres finis de sorte que des troncatures de ces matrices et séries doivent être opérées. Nous détaillerons la résolution numérique des problèmes (33) et (45) dans le chapitre V.

### IV-3.1 Les facteurs d'atténuation

Définissons les coefficients de Fourier discret  $\hat{a}_p$  d'ordre  $p$  associé aux  $m$  valeurs  $\{y_1^{(m)}, \dots, y_m^{(m)}\}$  d'une fonction définie aux points équi-répartis  $\{t_1^{(m)}, \dots, t_m^{(m)}\}$  par :

$$\forall p \in \mathbb{Z} : \quad \hat{a}_p = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m y_r^{(m)} e^{-i p t_r^{(m)}}. \quad (105)$$

Tirons de (97) et (98) les expressions des polynômes  $J_{n,m}(x)$  et  $V_{n,m}(x)$  associés à ces points :

$$J_{n,m}(x) = \sum_{k=-n}^n e^{i k x} \frac{n+1-|k|}{(n+1)m} \sum_{r=1}^m y_r^{(m)} e^{-i k t_r^{(m)}} = \sum_{k=-n}^n j_n^k \hat{a}_k e^{i k x}$$

et

$$V_{n,m}(x) = \sum_{k=-2n}^{2n} e^{i k x} v_n^k \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m y_r^{(m)} e^{-i t_r^{(m)} k} = \sum_{k=-2n}^{2n} e^{i k x} v_n^k \hat{a}_k$$

avec

$$j_n^k = \frac{n+1-|k|}{n+1} \text{ pour } -n \leq k \leq n \quad \text{et} \quad v_n^k = \begin{cases} 1 & 0 \leq |k| \leq n+1 \\ \frac{2n+1-|k|}{n} & n+2 \leq |k| \leq 2n. \end{cases}$$

Ces multiplicateurs  $j_n^k$  et  $v_n^k$  jouent le rôle des facteurs d'atténuation<sup>3</sup> puisqu'ils permettent de calculer le coefficient de Fourier discret  $\hat{a}_k$  d'ordre  $k$  pour  $-n \leq k \leq n$  (respectivement pour  $-2n \leq k \leq 2n$ ) à partir du coefficient  $j_n^k \hat{a}_k$  (respectivement  $v_n^k \hat{a}_k$ ) d'ordre  $k$  du polynôme  $J_{n,m}$  (respectivement  $V_{n,m}$ ).

3. Voir [42, §13.2-III] pour la définition des facteurs d'atténuation ainsi que leur application pour les interpolants linéaires et cubiques (splines).

### IV-3.2 Restriction des fonctions

Supposons que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{i n \theta}$  converge uniformément vers la fonction  $u(\theta)$  sur un intervalle  $K$  de  $[0, 2\pi]$ . Alors la série infinie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n e^{i n \theta}$  converge, uniformément sur tout compact intérieur à  $K$  tout en restant bornée en norme  $L^2$ , vers la fonction  $\chi_K u(\theta)$  sur  $K$  où le coefficient  $\beta_k$  est défini par :

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_K u(\theta) e^{-i k \theta} d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n r_n^k \quad \text{avec} \quad r_n^k = \frac{1}{2\pi} \int_K e^{i(n-k)\theta} d\theta$$

ou bien d'une façon équivalente :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \beta_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_n \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & r_n^k & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

De la même manière, si la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_n e^{i n \theta}$  converge uniformément vers la fonction  $\tilde{u}(\theta)$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\beta}_n e^{i n \theta}$  converge, uniformément sur tout compact intérieur à  $K$  tout en restant bornée en norme  $L^2$ , vers la fonction  $\chi_{\mathbb{T} \setminus K} \tilde{u}(\theta)$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , où pour tout entier positif  $k$ , le coefficient  $\tilde{\beta}_k$  est défini par :

$$\tilde{\beta}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{\mathbb{T} \setminus K} \tilde{u}(\theta) e^{-i k \theta} d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_n \tilde{r}_n^k \quad \text{où} \quad \tilde{r}_n^k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T} \setminus K} e^{i(n-k)\theta} d\theta$$

c'est-à-dire d'une manière équivalente :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{\beta}_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{\alpha}_n \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \tilde{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & \tilde{r}_n^k & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Remarquons que, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z} : r_n^k + \tilde{r}_n^k = \delta_n^k,$$

où  $\delta_n^k$  est le symbole de Kronecker, alors la somme  $\mathcal{R} + \tilde{\mathcal{R}}$  est égale à la matrice identité.

Lorsque l'intervalle  $K$  est symétrique, c'est-à-dire si

$$K = \{e^{i\theta} : -a \leq \theta \leq a\} \quad \text{ou bien} \quad K = \{e^{i\theta} : a \leq \theta \leq 2\pi - a\},$$

alors  $r_n^k$  et  $\tilde{r}_n^k$  sont donnés par

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{ip\theta} d\theta = \frac{a}{\pi} \text{sinc}(pa) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi-a} e^{ip\theta} d\theta = \frac{\pi-a}{\pi} \text{sinc}(p(\pi-a)).$$

De plus  $\mathcal{R}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}$  sont des matrices symétriques de Toeplitz.





## Chapitre V

# Retour au problème d'identification robuste $H^\infty$

Dans ce chapitre, nous allons présenter un schéma complet pour résoudre le problème de l'identification harmonique partielle et robuste dans  $H^\infty$  tel qu'il a été précédemment introduit au chapitre I. Cette étude, qui a fait l'objet d'un article [11] soumis pour publication et qui constitue une approche originale pour traiter des problèmes d'identification partielle, étend les résultats de [34, 40, 56, 58] aux cas plus réalistes où les données expérimentales ne sont disponibles que sur une bande stricte du domaine des fréquences et généralise ceux de [10] concernant le problème extrémal borné dans  $H^\infty$  au cas d'une contrainte variable.

Ce problème consiste à construire, depuis les données fréquentielles expérimentales sur la bande passante du système, une transformation robustement convergente (sur cette bande) vers les modèles stables dans  $H^\infty$ , tout en respectant une certaine contrainte de gabarit à l'extérieur de cette bande. La convergence robuste est celle définie par Partington dans [56] et qui correspond à la convergence uniforme de la transformation précédente vers la fonction de transfert du système sur la bande de fréquences lorsque le nombre de mesure tend vers l'infini et le niveau de bruit tend vers zéro, tout en satisfaisant asymptotiquement la contrainte imposée à l'extérieur de la bande.

Plus précisément, soit  $K$  un sous-arc strict et symétrique du cercle unité  $\mathbb{T}$  défini par :

$$K = \{e^{i\theta} : a \leq \theta \leq 2\pi - a\} \quad \text{où} \quad 0 < a < \pi, \text{ avec } \overline{\mathbb{T} \setminus K} = \{e^{i\theta} : -a \leq \theta \leq a\}.$$

Soit  $f$  une fonction de l'algèbre du disque  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  qui représente la fonction de transfert d'un système stable en temps discret. Nous supposons que la fonction  $f$  est donnée par ses valeurs  $(a_k = f(z_k) + \eta_k)_{-n \leq k \leq n}$  aux  $2n$  points  $(z_k)_{-n \leq k \leq n}$  de  $K$  et entachées d'un bruit  $(\eta_k)_{-n \leq k \leq n}$  appartenant à  $l^\infty$ . De plus nous ferons l'hypothèse que la fonction  $f$  appartient à la classe des modèles dans laquelle nous chercherons une meilleure approximation c'est-à-dire que  $f$  satisfait *a priori* la contrainte suivante sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  :

$$|f(z) - h(z)| \leq r(z), \quad \text{pour} \quad z \in \overline{\mathbb{T} \setminus K},$$

où  $h$  et  $r$  sont deux fonctions continues sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  et  $r$  est telle que :

$$r(e^{\pm ia}) = 0 \quad \text{et} \quad r(z) > 0, \quad \forall z \in \mathbb{T} \setminus K.$$

L'identification robuste sur la bande de fréquences  $K$  consiste à construire, avec les données  $(a_k)_{-n \leq k \leq n}$ , une approximation  $f_n$  de  $f$  sur  $K$  qui converge robustement sur  $K$  au sens où :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \leq \epsilon} \|f_n - f\|_{L^\infty(K)} = 0;$$

nous imposons de plus que l'approximant  $f_n$  respecte asymptotiquement la contrainte sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\| \eta \|_\infty \leq \epsilon} \left\{ \sup_{z \in \overline{\mathbb{T} \setminus K}} \left\{ |f_n(z) - h(z)| - r(z) \right\} \right\} \leq 0.$$

Pour résoudre ce problème, nous avons développé un algorithme d'identification en deux étapes que nous présenterons dans ce chapitre.

La première étape, qui sera détaillée dans les paragraphes V-1, consiste à construire une approximation robuste  $p_n$  des données :  $(a_k)_{-n \leq k \leq n}$  sur  $K$  et  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

La deuxième étape, que nous détaillerons tout au long de la section V-2, se formule comme un problème extrémal (dual) borné dans  $H^\infty$  et consiste, quant à elle, à résoudre une famille de problèmes (*pondérés*) de Nehari. Ce problème extrémal borné, qui sera étudié en section V-2.1, constitue une généralisation, au cas d'une contrainte variable  $r$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , du problème déjà détaillé en section III-2. Compte tenu du fait que cet algorithme doit nous permettre de reconstituer au sens de la convergence robuste, la fonction de transfert initiale  $f$  supposée dans l'algèbre du disque  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ , il sera indispensable de supposer une certaine *continuité* des données et de l'approximant que nous détaillerons dans les paragraphes V-2.2 et V-2.4. Ces conditions sont extraites de l'étude du problème classique de Nehari dont les résultats essentiels seront rappelés en section V-2.3. De plus nous supposerons que les données sont denses sur  $K$ . Par ailleurs, nous monterons dans V-3 que, pour garantir la convergence du schéma numérique, certaines hypothèses de régularité sont exigées sur la contrainte  $r$  et sur les divers symboles intermédiaires (de la famille) à approximer.

Le schéma global de cet algorithme sera présenté en section V-4 et une estimation de l'erreur d'approximation associée à cette identification sera donnée en section V-5.

## À propos de la contrainte sur $\mathbb{T} \setminus K$

Dans ce schéma d'identification, les fonctions  $h$  et  $r$  représentent les deux paramètres qui nous permettent de *compléter* la fonction  $f$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . La fonction  $h$  représente un comportement de référence pour  $f$  dont l'approximant ne doit pas s'éloigner à plus de la distance  $r$ . Il est alors clair que plus la fonction  $h$  est une proche estimation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , moins grande est l'amplitude  $r$  nécessaire à la capture asymptotique de  $f$ . Réciproquement, lorsque le comportement  $h$  de  $f$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  ne peut être fourni a priori d'une manière suffisamment précise, le choix d'un gabarit  $r$  suffisamment large est alors nécessaire pour compenser le manque de *visibilité* sur  $f$ . En pratique (voir chapitre VI), cette contrainte  $r$  nous permet de choisir un compromis entre une bonne approximation des données sur  $K$ , obtenue par des fonctions  $r$  de grandes amplitudes, et un comportement contrôlé sur  $\mathbb{T} \setminus K$  obtenu, au contraire, par des fonctions  $r$  de faibles amplitudes.

Par ailleurs, et de part la définition de  $f_n$ , les quantités  $|f_n - f|$  et  $|f_n - h|$  convergent uniformément, respectivement vers 0 sur  $K$  et vers  $r$  sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  quand  $n$  tend vers l'infini et  $\epsilon$  tend vers zéro. De plus, puisque  $r(e^{\pm ia}) = 0$  alors  $f(z_n) = h(z_n)$  (et  $f(\bar{z}_n) = h(\bar{z}_n)$ ). Cette dernière condition qui impose à  $h$  de coïncider avec la fonction inconnue  $f$  aux extrémités de  $K$ , rend la construction de  $h$  théoriquement impossible. Néanmoins, pour garder un schéma robustement convergent, nous allons spécifier les données sur  $\mathbb{T} \setminus K$  sous une forme analogue à celle des données sur  $K$  en choisissant une fonction inconnue  $h$  qui coïncide avec  $f$  aux extrémités de  $K$  à laquelle nous ajoutons une fonction dans la famille  $(e_c)_{c \in \mathbb{C}}$  des fonctions qui convergent uniformément vers zéro sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  quand  $c$  tend vers zéro et tels que  $e_c(e^{ia}) = c$  et  $e_c(e^{-ia}) = \bar{c}$ . Pour des raisons de simplicité, nous nous limiterons aux fonctions  $e_c(z)$  linéaires en  $z$  définies sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  par :

$$\forall z \in \overline{\mathbb{T} \setminus K} : e_c(z) = \frac{c(z - e^{-ia}) - \bar{c}(z - e^{ia})}{2i \sin a}, \quad (106)$$

et nous choisissons la complétion des données sur  $\mathbb{T} \setminus K$  sous la forme  $h_0 + e_{a_n}$  dont le terme  $h_0 = h - e_{f(e^{i \cdot} a)}$  est une fonction qui s'annule aux extrémités de  $K$ . Remarquons que  $e_{a_n}$  est une fonction continue des données  $a_n$  et  $\bar{a}_n$  directement disponibles et que la différence entre cette complétion  $h_0 + e_{a_n}$  et la fonction  $h$  initiale est au plus égale à  $\eta_n$  :

$$|(h_0 + e_{a_n}) - h| = |e_{a_n} - e_{f(e^{i \cdot} a)}| = |e_{\eta_n}| \leq \eta_n.$$

Ce procédé constructif préserve la convergence robuste et nous permet une complétion continue (aux extrémités) des données sur tout le cercle.

## V-1 Interpolation robuste des données

Rappelons que nous disposons d'une part des  $n$  valeurs  $a_1, \dots, a_n$  (et des  $n$  autres valeurs  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$  par conjugaison) sur  $K$  et d'autre part de la fonction  $h_0 + e_{a_n}$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Nous allons d'abord générer, à partir de cette dernière fonction,  $n'$  valeurs  $a_{n+1}, \dots, a_{n+n'}$  aux points  $z_{n+1}, \dots, z_{n+n'}$  de  $\mathbb{T} \setminus K$ .

L'échange de la fonction  $h_0 + e_{a_n}$  par  $n'$  de ses valeurs ponctuelles s'accompagne nécessairement d'une perte d'information sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Cependant, l'erreur d'approximation ainsi induite peut être réduite par un choix approprié (suffisamment grand) de la valeur de  $n'$  pour rendre cette erreur de discrétisation négligeable devant l'erreur d'estimation sur  $\mathbb{T} \setminus K$  de la fonction  $f$  par  $h_0 + e_{a_n}$  ou simplement devant la fonction  $r$ .

Par ailleurs, pour conserver la convergence robuste de cette étape, nous imposons à  $n'$  de ne pas faire augmenter, par les points  $z_{n+1}, \dots, z_{n+n'}$ , le saut maximum entre les points de l'ensemble  $\{z_1, \dots, z_{n+n'}\}$  c'est-à-dire de choisir  $n'$  (par exemple  $n' \geq \frac{a}{\pi-a} n$ ) tel que :

$$\sup_{1 \leq k \leq n'-1} |z_{n+k+1} - z_{n+k}| \leq \xi_n \quad \text{avec} \quad \xi_n = \sup_{1 \leq k \leq n-1} |z_{k+1} - z_k|.$$

A ce stade et après complétion par conjugaison en prenant  $a_{-k} = \bar{a}_k$  pour  $1 \leq k \leq n + n'$ , nous disposons de  $2(n + n')$  valeurs  $a_{-n-n'}, \dots, a_{n+n'}$  données aux points  $z_{-n-n'}, \dots, z_{n+n'}$  (non nécessairement équi-répartis) distribués sur tout le cercle  $\mathbb{T}$  avec un saut maximum de  $\xi_n$ .

Dans cette première étape de l'algorithme, les polynômes (modifiés) de Jackson  $\tilde{J}$  et de la Vallée Poussin  $\tilde{V}$  nous permettent de calculer un approximant  $p_n$  de ces données. Par ailleurs, si  $\xi_n = O(\frac{1}{n'+n})$  c'est-à-dire si les points  $z_{-n-n'}, \dots, z_{n+n'}$  sont denses sur  $\mathbb{T}$ , alors  $\tilde{J}$  et  $\tilde{V}$  convergent robustement, par le théorème 10, vers la fonction  $f \vee h$  sur tout le cercle  $\mathbb{T}$  puisque  $h_0 + e_{a_n} = h + e_{\eta_n}$  et que par définition,  $e_{\eta_n}$  converge robustement vers 0.

Remarquons que le polynôme  $p_n$ , construit à partir de données expérimentales et bruitées, n'est vraisemblablement pas dans  $H^\infty$ . Si  $p_n \in H^\infty$  alors  $p_n \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$  est solution du problème

*Nous supposons dans la suite que le polynôme  $p_n$  issu de cette première étape d'approximation n'est pas dans  $H^\infty$ .*

## V-2 Approximation dans $\mathcal{A}(\mathbb{D})$

La seconde étape de l'algorithme consiste à construire un approximant  $f_n$  stable et continue qui converge robustement vers la fonction  $f$  sur  $K$  et respecte la contrainte  $r$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . La proposition suivante dont la démonstration est reporté à la fin du paragraphe V-2.4 nous garantit l'existence d'un tel approximant :

**Proposition 12** *Si la fonction  $r$  est  $\mu$ -Lipschitz sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  avec  $0 < \mu < 1$  et tel que  $r(e^{\pm i a}) = 0$ , alors il existe un réel positif  $\varepsilon_n$  telle que la fonction  $f_n$  solution du problème :*

$$\|p_n - f_n\|_{L^\infty(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{r+\varepsilon_n, p_n}^\infty} \|p_n - g\|_{L^\infty(K)} = \varepsilon_n \quad \left( = \beta_\infty(\varepsilon_n) = \beta_\infty \right), \quad (107)$$

soit dans l'algèbre du disque  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ . De plus, si  $p_n$  converge robustement vers  $f \vee h$  sur  $\mathbb{T}$ , l'approximant  $f_n$  converge robustement vers la fonction  $f$  sur  $K$  :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \leq \epsilon} \|f_n - f\|_{L^\infty(K)} = 0, \quad (108)$$

et respecte asymptotiquement la contrainte  $r$  sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \leq \epsilon} \left\{ \sup_{z \in \overline{\mathbb{T} \setminus K}} (|f_n(z) - h(z)| - r(z)) \right\} \leq 0. \quad (109)$$

Nous allons tout d'abord justifier la nécessité de considérer une contrainte variable sur  $\mathbb{T} \setminus K$  et montrer en section V-2.1 que, dans ce cas aussi, le problème extrémal borné, déjà considéré dans la section III-2 pour une contrainte constante, est à son tour équivalent à un problème de Nehari et admet par conséquent une solution.

Nous indiquerons ensuite qu'un ajustement à  $r + \epsilon_n$  de la contrainte  $r$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , pour un choix de  $\epsilon_n$  que l'on montrera possible, ainsi qu'une condition de Lipschitz sur  $r$  permettent de garantir l'appartenance de l'approximant  $f_n$  à l'algèbre du disque  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ . Nous rappellerons au passage quelques points essentiels relatifs au problème classique de Nehari.

Associions à la fonction  $p_n$  le problème extrémal borné suivant :

$$\|p_n - \hat{g}_n\|_{L^\infty(K)} = \min_{g \in B_{\beta_n}^\infty} \|p_n - g\|_{L^\infty(K)} = \beta_\infty. \quad (110)$$

Lorsque la contrainte  $r$  est partout égale à une constante  $M$ , ce problème (110) est équivalent, compte tenu de l'hypothèse  $p_n \notin H^\infty$  soit encore  $\beta_\infty > 0$ , au problème de Nehari suivant (voir section III-2) :

$$\min_{v \in H^\infty} \|p_n w_{\beta_\infty \vee \frac{1}{M}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|p_n w_{\beta_\infty \vee \frac{1}{M}} - v_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1,$$

avec

$$\hat{g}_n = v_n w_{\beta_\infty \vee \frac{1}{M}}^{-1}.$$

Cette dernière équation montre que lorsque la contrainte  $r$  est constante sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , la solution  $\hat{g}_n \in H^\infty$  du problème (110) est généralement discontinue aux extrémités  $\{e^{-ia}, e^{ia}\}$  de l'intervalle  $K$ . Pour construire une solution continue sur  $\mathbb{T}$ , il est alors nécessaire de considérer une contrainte variable  $r$  et de généraliser par conséquent à ce cas l'étude du problème extrémal borné menée en section III-2.

### V-2.1 Retour au problème extrémal borné

Soient  $u$  une fonction de  $L^\infty(K)$  et  $v$  et  $\rho$  deux fonctions de  $L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)$ . Considérons de nouveau le problème extrémal borné (25) dans  $H^\infty$  :

$$\|u - \hat{g}\|_{L^\infty(K)} = \min_{g \in B_{\beta, v}^\infty} \|u - g\|_{L^\infty(K)} = \beta_\infty. \quad (111)$$

Supposons que les fonctions  $v$  et  $\rho$  soient continues sur la fermeture  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  de  $\mathbb{T} \setminus K$  et que  $\rho$  soit positive.

Si  $\log(\rho) \in L^1(\mathbb{T})$ , il en résulte d'une part que :

$$\forall \beta > 0 : \quad \beta \vee \rho \in L^\infty(\mathbb{T}) \quad \text{et} \quad \log(\beta \vee \rho) \in L^1(\mathbb{T}),$$

de sorte que :

$$\forall \beta > 0 : w_{\beta \vee \rho}^{-1} = w_{\frac{1}{\beta} \vee \frac{1}{\rho}} \in H^\infty.$$

D'autre part, nous déduisons que l'ensemble  $\mathcal{B}_{\rho,v}^\infty$  est non vide. En effet, puisque  $\inf_{\mathbb{T} \setminus K}(\rho) > 0$ , alors par le théorème 2 (ou bien le théorème II.4 de Runge), il existe toujours une fonction  $g \in H^\infty$  telle que  $\|v - g\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} \leq \inf_{\mathbb{T} \setminus K}(\rho)$  et par conséquent  $g \in \mathcal{B}_{\rho,v}^\infty$ .

Par ailleurs, les équivalences suivantes :

$$g \in \mathcal{B}_{\rho,v}^\infty \iff |g - v| \leq |w_{1 \vee \rho}| \text{ p.p. sur } \mathbb{T} \setminus K \iff g w_{1 \vee \frac{1}{\rho}} \in \mathcal{B}_{1, w_{1 \vee \frac{1}{\rho}} \cdot v}^\infty$$

montrent que  $\hat{g}$  est solution du problème (111) si et seulement si  $g_1 = \hat{g} w_{1 \vee \frac{1}{\rho}}$  est solution du problème extrémal borné suivant :

$$\|u w_{1 \vee \frac{1}{\rho}} - g_1\|_{L^\infty(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{1, w_{1 \vee \frac{1}{\rho}} \cdot v}^\infty} \|u w_{1 \vee \frac{1}{\rho}} - g\|_{L^\infty(K)},$$

soit encore compte tenu de la proposition 3 et lorsque  $\beta_\infty > 0$ , si et seulement si  $v_0 = g_1 w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\rho}}$  c'est-à-dire

$$v_0 = \hat{g} w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\rho}}$$

est solution du problème de Nehari pondéré suivant :

$$\min_{v \in H^\infty} \|(u \vee v) w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\rho}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|(u \vee v) w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\rho}} - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1.$$

Par cette dernière équivalence et en adaptant les résultats de la proposition 3 au problème (111) puis en tenant compte du fait que  $H^\infty + C(\mathbb{T})$  est une algèbre (voir [29, IX, thm.2.2]), nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

**Proposition 13** *Soit  $u$  une fonction de  $L^\infty(K)$ . Soient  $v$  et  $\rho$  deux fonctions continues sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$ ,  $\rho$  étant positive. Alors :*

1. *Le problème (111) admet toujours une solution  $\hat{g}$  dans  $\mathcal{B}_{\rho,v}^\infty$  ; de plus si  $u \vee v$  appartient à l'algèbre  $H^\infty + C(\mathbb{T})$ , alors cette solution  $\hat{g}$  est unique.*

Supposons que  $u \notin \mathcal{B}_{\rho,v}^\infty$  de sorte que  $\beta_\infty > 0$ , alors :

2. *si la fonction  $u \vee v$  est dans l'algèbre  $H^\infty + C(\mathbb{T})$ , l'erreur  $|u \vee v - \hat{g}|$  est presque partout égale à  $\beta_\infty \vee \rho$ .*
3. *la fonction  $\hat{g}$  est solution du problème (111) si et seulement si la fonction  $v_0 = \hat{g} w_{1/\beta_\infty \vee 1/\rho}$  est solution du problème implicite de Nehari suivant :*

$$\min_{v \in H^\infty} \|(u \vee v) w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\rho}} - v\|_\infty = \|(u \vee v) w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\rho}} - v_0\|_\infty = 1. \quad (112)$$

Remarquons que  $\beta_\infty$  est définie par (111), et que la pondération  $w_{1/\beta_\infty \vee 1/\rho}$  dépend de  $\rho$ ,  $u$  et  $v$  à travers  $\beta_\infty$ . Le problème (112) est un problème implicite et la valeur recherchée de  $\beta_\infty$  est celle qui rend le minimum dans (112) égal à 1. Qu'une telle valeur existe et soit unique découle du lemme 3 qui garantit par ailleurs un procédé dichotomique pour calculer  $\beta_\infty$  en considérant la fonction  $(u \vee v) w_{1 \vee 1/\rho}$  et en supposant  $u \vee v \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ .

### V-2.2 À la recherche d'un approximant continu

Revenons au problème extrémal borné (110) associé à  $p_n$  :

$$\|p_n - \hat{g}_n\|_{L^\infty(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{\sigma_\varepsilon, p_n}^\infty} \|p_n - g\|_{L^\infty(K)} = \beta_\infty.$$

Puisque  $p_n \notin H^\infty$ , alors  $\beta_\infty > 0$  et ce problème est équivalent au problème de Nehari suivant (cf. proposition 13) :

$$\min_{v \in H^\infty} \|p_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{r}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|p_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{r}} - v_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1,$$

avec

$$\hat{g}_n = v_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{r}}^{-1}.$$

Cette équation montre que, comme dans le cas d'une contrainte constante, la solution  $\hat{g}_n \in H^\infty$  du problème (110) est généralement discontinue aux extrémités  $\{e^{-ia}, e^{ia}\}$  de l'intervalle  $K$ . Nous allons montrer qu'il est possible de garantir la continuité de la solution sur  $\mathbb{T}$  en modifiant la contrainte  $r$  en une autre  $\sigma$ . Posons

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z \in \overline{\mathbb{T} \setminus K} : \quad \sigma_\varepsilon(z) = r(z) + \varepsilon. \quad (113)$$

Modifions la contrainte sur  $\mathbb{T} \setminus K$  et considérons pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , le problème extrémal borné suivant :

$$\|p_n - \hat{g}_{n,\varepsilon}\|_{L^\infty(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{\sigma_\varepsilon, p_n}^\infty} \|p_n - g\|_{L^\infty(K)} = \beta_\infty(\varepsilon). \quad (114)$$

Puisque  $p_n \notin H^\infty$ , alors  $\beta_\infty(\varepsilon) > 0$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . Le problème (114) précédent est alors équivalent au problème de Nehari suivant :

$$\min_{v \in H^\infty} \|p_n w_{\frac{1}{\beta_\infty(\varepsilon)} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|p_n w_{\frac{1}{\beta_\infty(\varepsilon)} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_{n,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1,$$

avec

$$\hat{g}_{n,\varepsilon} = v_{n,\varepsilon} w_{\frac{1}{\beta_\infty(\varepsilon)} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}^{-1}.$$

Cette dernière équation montre que, pour garantir l'appartenance à  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  de la solution  $\hat{g}_{n,\varepsilon}$ , il est déjà nécessaire de choisir la valeur  $\varepsilon_n$  de  $\varepsilon$  telle que

$$\beta_\infty(\varepsilon_n) = \sigma_\varepsilon(e^{\pm ia}) = \varepsilon_n,$$

afin de ne pas compromettre la continuité sur  $\mathbb{T}$  de la solution  $f_n = \hat{g}_{n,\varepsilon_n}$  du problème (114). Le lemme suivant nous montre qu'un tel choix  $\varepsilon_n$  de  $\varepsilon$  est toujours possible :

**Lemme 15** *La fonction  $\varepsilon \mapsto \beta_\infty(\varepsilon)$  est continue, décroissante et admet un point fixe  $\varepsilon_n$  :*

$$\beta_\infty(\varepsilon_n) = \varepsilon_n. \quad (115)$$

#### Démonstration du lemme 15

Remarquons d'abord que la convexité de l'ensemble  $\mathcal{B}_{\sigma_\varepsilon, p_n}^\infty$  et celle de la norme  $\|\cdot\|_{L^\infty(K)}$  impliquent la convexité et par conséquent la continuité de la fonction  $\varepsilon \mapsto \beta_\infty(\varepsilon)$ . Notons ensuite que cette fonction est décroissante puisque pour tous réels positifs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , nous avons :

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \quad \implies \quad \mathcal{B}_{\sigma_{\varepsilon_1}, p_n}^\infty \subseteq \mathcal{B}_{\sigma_{\varepsilon_2}, p_n}^\infty$$

et par conséquent :

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \quad \implies \quad \beta_\infty(\varepsilon_1) \geq \beta_\infty(\varepsilon_2).$$

Pour finir la démonstration, il nous reste à démontrer que la courbe de la fonction  $\beta_\infty(\varepsilon)$  intersecte la première bissectrice du plan. Compte tenu du fait que cette fonction est continue et décroissante, il suffit alors de démontrer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \beta_\infty(\varepsilon) = 0. \quad (116)$$

En effet, supposons que cette courbe reste du même côté que sa limite à l'infini par rapport à cette bissectrice. Il en résulte que  $\beta_\infty(\varepsilon) < \varepsilon$  pour toutes les valeurs positives de  $\varepsilon$  et par conséquent la limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\infty(\varepsilon)$  est nulle. La fonction monotone et continue  $\beta_\infty$  serait alors identiquement nulle contredisant ainsi l'hypothèse  $p_n \notin H^\infty$ .

Quant à la limite (116), elle est une conséquence directe du théorème 2 puisque l'ensemble  $\mathcal{B}_{\sigma_\varepsilon, p_n}^\infty$  s'étend à tout l'espace  $H^\infty$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers l'infini et que, par conséquent, la fonction continue  $p_n$  peut être approximée à une précision arbitraire sur  $K$  par les fonctions de  $H^\infty$ .  $\square$

### V-2.3 À propos du problème de Nehari classique

Étant donnée une fonction  $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ , le problème non-linéaire de Nehari [80, chap. 15] consiste à trouver une fonction  $v_0 \in H^\infty$  meilleure approximation de  $u$  dans  $H^\infty$  c'est-à-dire vérifiant :

$$\|u - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \min_{v \in H^\infty} \|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \text{dist}(u, H^\infty)$$

Un résultat classique de Adamyan, Arov et Krein [1] donne la solution  $v_0$  de ce problème en termes de valeurs et vecteurs singuliers de l'opérateur de Hankel  $\Gamma_u$  associé au symbole  $u$  (voir [59, Chap.3] pour l'étude des propriétés élémentaires des opérateurs de Hankel).

Rappelons que l'opérateur de Hankel  $\Gamma_u$  de symbole  $u$  est définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma_u : H^2 &\rightarrow L^2(\mathbb{T}) \setminus H^2 \\ x &\mapsto P_-(ux) \end{aligned}$$

où  $P_-$  désigne la projection orthogonale de  $L^2(\mathbb{T})$  dans  $L^2(\mathbb{T}) \setminus H^2$ . Rappelons aussi que si cet opérateur de Hankel  $\Gamma_u$  atteint sa norme en un vecteur non nul  $x$  dit maximisant c'est-à-dire tel que :

$$\|\Gamma_u x\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\Gamma_u\| \|x\|_{L^2(\mathbb{T})} \quad \text{avec} \quad \|\Gamma_u\| = \text{dist}(u, H^\infty),$$

alors il existe une unique meilleure approximation  $v_0$  donnée par [80, theo.15.16] :

$$v_0 = u - \frac{\Gamma_u x}{x}.$$

et où l'erreur  $|u - v_0|$  est circulaire [65, theo.5.6].

Tout opérateur n'admet pas forcément un vecteur maximisant (voir [80, theo.15.15] pour un contre-exemple) néanmoins un tel vecteur existe lorsque l'opérateur de Hankel  $\Gamma_u$  est compact c'est-à-dire lorsque  $u \in H^\infty + C(\mathbb{T})$  par le théorème de Hartman [65, theo.3.1].

Résumons les propriétés essentielles du problème de Nehari qui peut être considéré comme un problème extrémal dual dans  $H^\infty$  (voir §II-1) :

1. une solution  $v_0$  existe toujours ;
2. la solution n'est pas forcément unique mais elle l'est tout au moins si  $u \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ , et, dans ce cas, l'erreur  $|u - v_0|$  est alors une fonction constante p.p. sur  $\mathbb{T}$  ;
3. toute solution  $v_0$  est continue sur  $\mathbb{T}$  dès que  $u$  est Dini-continue (théorème de Carleson-Jacobs) et cette condition de Dini-continuité ne peut être relâchée (cf. théorème II.3 ; voir [19, theo.4] ou [29, Chap.IV-theo.2.2] ou [1, Rmq.3.2] pour un contre-exemple). Une fonction est dite Dini-continue si son module de continuité est intégrable en 0 par rapport à la mesure  $dt/t$ .



### Sur la continuité de l'opérateur de meilleure approximation

Ainsi, puisque tout opérateur compact atteint sa norme, alors par le théorème de Hartman, toute fonction de  $H^\infty + C(\mathbb{T})$  admet une unique meilleure approximation dans  $H^\infty$  au sens de la norme uniforme. Notons par  $\mathbf{A}$  cet opérateur d'approximation (nous ne donnons pas de domaine de définition pour  $\mathbf{A}$ ; le lecteur se reportera par ailleurs à [61] pour une étude détaillée de ces propriétés de continuité).

L'étude de la continuité de l'opérateur  $\mathbf{A}$  est importante, tout au moins pour deux raisons. D'une part, pour une fonction donnée  $u$  définie sur  $\mathbb{T}$  et comme soulignée dans [61], on ne calcule généralement qu'une approximation  $\tilde{u}$  de  $u$  si bien que nous sommes amenés à estimer la déviation  $\|\mathbf{A}f - \mathbf{A}\tilde{u}\|$  dans le cas où  $\tilde{u}$  est une petite perturbation (dans un certain sens) de  $u$ . D'autre part et comme démontré dans [41], la fonction  $u(z) = \bar{z}^2$  est un point de discontinuité de  $\mathbf{A}$  puisqu'il existe une suite  $u_n$  de fonctions régulières qui converge vers  $u$  dans  $L^\infty(\mathbb{T})$  sans que la suite  $\mathbf{A}u_n$  des approximants ne converge vers  $\mathbf{A}u$  dans  $L^\infty(\mathbb{T})$ .

La continuité de l'opérateur d'approximation a été étudiée dans un cadre plus générale où le problème posé consiste à trouver les classes  $\mathcal{X} \subset H^\infty + C(\mathbb{T})$  pour lesquelles  $\mathcal{AX} \subset \mathcal{X}$  (étude due à Peller et Hrušev [65, chap.5]). On dit que de telles classes vérifient la propriété d'hérédité. Sans détailler une telle étude (voir [65, Chap.5], [19, 62, 61]), indiquons que l'algèbre de Wiener  $\mathcal{W}$  [43, Chap.5] constituée des fonctions continues sur  $\mathbb{T}$  dont les séries de Fourier convergent absolument :

$$\mathcal{W} = \left\{ u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n| < \infty \right\} \quad \text{avec} \quad \|u\|_{\mathcal{W}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n|,$$

vérifie cette propriété d'hérédité.

**Théorème 12** [36, theo.6] *Soit  $u$  une fonction de l'algèbre de Wiener  $\mathcal{W}$  telle que  $\mathbf{A}(u) \neq u$ . L'opérateur d'approximation :*

$$\mathbf{A} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$$

*est continu si et seulement si sa plus grande valeur singulière est simple.*

Rappelons [65, Chap.5] par ailleurs que les valeurs singulières  $\{s_k(T)\}_{k \geq 0}$  d'un opérateur compact  $T$ , sont données par la suite des valeurs propres de l'opérateur  $(T^*T)^{1/2}$  et que la plus grande valeur  $s_0(T) = \|T\|$ .

Pour finir, mentionnons le fait que la fermeture  $\lambda_\alpha$  des polynômes trigonométriques au sens de la norme de Lipschitz pour  $0 < \alpha < 1$  :

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_\infty + \sup_{\zeta \neq \eta} \frac{|u(\zeta) - u(\eta)|}{|\zeta - \eta|^\alpha}$$

vérifie aussi la propriété d'hérédité [19].

### V-2.4 À la recherche d'un approximant continu (suite)

Avant de démontrer la proposition 12, il nous reste à établir le lemme suivant :

**Lemme 16** *Si la fonction  $r$  est de Lipschitz d'exposant  $\mu$  pour  $0 < \mu < 1$  sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  avec  $r(e^{\pm i\alpha}) = 0$ , alors le facteur extérieur  $w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  est aussi  $\mu$ -Lipschitz sur  $\mathbb{T}$ .*

#### Démonstration du lemme 16

Remarquons d'abord que, puisque la fonction  $r$  est  $\mu$ -Lipschitz sur  $\mathbb{T}$ , le calcul suivant :

$$\varepsilon \vee \sigma_\varepsilon(z_1) - \varepsilon \vee \sigma_\varepsilon(z_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } z_1 \in K \text{ et } z_2 \in K \\ r(z_1) - r(z_2) & \text{si } z_1 \in \mathbb{T} \setminus K \text{ et } z_2 \in \mathbb{T} \setminus K \\ -r(z_2) = r(e^{i\alpha}) - r(z_2) & \text{si } z_1 \in K \text{ et } z_2 \in \mathbb{T} \setminus K \end{cases}$$

montre que pour tout réel positif  $\varepsilon$  la fonction  $\varepsilon \vee \sigma_\varepsilon$  est aussi  $\mu$ -Lipschitz sur  $\mathbb{T}$ . Par ailleurs, compte tenu du fait que  $\varepsilon \vee \sigma_\varepsilon$  est une fonction bornée et strictement positive pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon \vee \sigma_\varepsilon \leq \max_{z \in \mathbb{T} \setminus K} r(z) + \varepsilon, \quad (117)$$

son inverse  $\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$  c'est-à-dire  $|w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}|$  est alors une fonction  $\mu$ -Lipschitz sur  $\mathbb{T}$ .

De plus, puisque pour tous réels  $x$  et  $y$  positifs,  $|\log(x) - \log(y)| \leq |x - y| / \min(x, y)$  alors pour tous éléments  $z_1$  et  $z_2$  de  $\mathbb{T}$ :

$$\left| \log |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z_1)| - \log |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z_2)| \right| \leq \frac{\left| |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z_1)| - |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z_2)| \right|}{\max_{z \in \mathbb{T} \setminus K} r(z) + \varepsilon}.$$

Il en résulte que la fonction  $\log |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}|$  est  $\mu$ -Lipschitz sur  $\mathbb{T}$ .

Par ailleurs, pour tout élément  $z \in \mathbb{D}$ , soient  $P_z$  et  $Q_z$  le noyau et le noyau conjugué de Poisson définis par :

$$P_z(\theta) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right), \quad Q_z(\theta) = \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right).$$

Posons :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(\theta) \log |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(\theta)| d\theta \quad \text{et} \quad \bar{u}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_z(\theta) \log |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(\theta)| d\theta,$$

où  $\bar{u}$  est la fonction conjuguée de  $u$ . Alors

$$w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z) = e^{u(z) + i\bar{u}(z)} \quad \text{et} \quad u(z) = \log |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z)|.$$

Compte tenu de (117), la fonction  $\log |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(e^{i\theta})|$  est intégrable sur  $\mathbb{T}$ . Il en résulte d'une part et par [25, thm.1.2] que la fonction  $u$  admet une limite non-tangentielle sur  $\mathbb{T}$  donnée en tout point de continuité de  $\log |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}|$  c'est-à-dire sur  $\mathbb{T}$  par le théorème de Fatou :

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} u(\rho e^{i\theta}) = \log |w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(e^{i\theta})|. \quad (118)$$

D'autre part et par [29, Chap.III-lem.1.1] que la fonction  $\bar{u}$  admet une limite non-tangentielle sur  $\mathbb{T}$ .

Par conséquent, la fonction  $w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  admet une limite radiale sur  $\mathbb{T}$  donnée par :

$$w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(e^{i\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \left( e^{u(\rho e^{i\theta})} e^{i\bar{u}(\rho e^{i\theta})} \right). \quad (119)$$

Cette limite  $w_{\frac{1}{\varepsilon} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  est une fonction  $\mu$ -Lipschitz. En effet, la fonction  $u$ , limite radiale d'une fonction  $\mu$ -Lipschitz par (118), est elle même  $\mu$ -Lipschitz. De plus, puisque l'opérateur de conjugaison  $u \rightarrow \bar{u}$  préserve la classe des fonctions  $\mu$ -Lipschitz [29, Chap.III-thm.1.3], alors la fonction  $\bar{u}$  est  $\mu$ -Lipschitz sur  $\mathbb{T}$ .  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que la fonction  $f_n = \hat{g}_{n, \varepsilon_n}$  converge robustement vers la fonction  $f$  sur  $K$  et respecte la contrainte  $r$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

### Démonstration de la proposition 12

Rappelons que le lemme 15 nous garantit l'existence d'un réel  $\varepsilon_n$  positif tel que  $\beta_\infty(\varepsilon_n) = \varepsilon_n = \beta_\infty$  et que le lemme 16 montre que, pour cette valeur  $\varepsilon_n$  de  $\varepsilon$ , le facteur extérieur  $w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_n}}}$  est  $\mu$ -Lipschitz continue sur  $\mathbb{T}$  et que, par conséquent, la fonction  $p_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_n}}}$  est Dini-continue (c'est à dire ayant un module de continuité intégrable en 0 par rapport à la mesure  $dt/t$ , cf. §II-1). Par ailleurs, par la proposition 13, la fonction  $f_n$  est solution du problème (107) si et seulement si  $f_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_n}}}$  est solution du problème de Nehari suivant :

$$\min_{v \in H^\infty} \|p_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_n}}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|p_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_n}}} - f_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_n}}}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1. \quad (120)$$

Puisque la fonction  $p_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_n}}}$  est Dini-continue sur  $\mathbb{T}$ , le théorème de Carleson-Jacobs (cf. théorème II.3) implique que cette solution  $f_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_n}}}$  est dans l'algèbre du disque  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ . De plus, puisque le facteur extérieur  $w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_n}}}$  ainsi que son inverse appartiennent à  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ , l'approximant  $f_n$  est une fonction de  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ .

Par ailleurs, compte tenu respectivement des inégalités suivantes :

$$|f - f_n| \leq |f - p_n| + \beta_\infty \text{ sur } K \text{ et } |h - f_n| \leq |h - p_n| + r + \beta_\infty \text{ sur } \mathbb{T} \setminus K \quad (121)$$

et de la convergence robuste du polynôme  $p_n$  vers  $f \vee h$ , il suffit, pour finir la démonstration de la proposition 12, de démontrer que :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \beta_\infty = 0.$$

Cette dernière limite est une conséquence de la convergence robuste du polynôme  $p_n$  vers la fonction  $f \vee h$ . En effet, supposons au contraire qu'il existe un réel positif  $\beta_{min}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad \beta_\infty(n, \varepsilon) > \beta_{min} > 0.$$

D'abord la convergence robuste de  $p_n$  vers  $f \vee h$  implique qu'il existe un entier positif  $n_1$  tel que :

$$\forall n > n_1 : \quad |p_n - f \vee h| < \beta_{min}.$$

Ensuite, l'hypothèse  $|f - h| \leq r$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  faite initialement sur  $f, h$  et  $r$ , implique que :

$$\forall n > n_1 : \quad |f - p_n|(z) \leq |f - h|(z) + |h - p_n|(z) \leq r + \beta_{min} \leq \sigma_{\varepsilon_n}, \quad \forall z \in \mathbb{T} \setminus K.$$

Par conséquent,  $f \in B_{\sigma_{\varepsilon_n}, p_n}^\infty$  et

$$\forall n > n_1 : \quad \beta_\infty \leq \|p_n - f\|_{L^\infty(K)} \leq \beta_{min}$$

ce qui contredit la définition de  $\beta_{min}$ . Ainsi, l'erreur d'approximation  $\beta_\infty(n, \varepsilon)$  converge vers 0.  $\square$

### V-2.5 Calcul de l'approximant : résolution de l'équation implicite (115)

Pour terminer cette seconde étape de l'algorithme, il nous reste à calculer l'approximant stable et continue  $f_n$ . Nous savons déjà que cette fonction  $f_n$  est la solution du problème de Nehari implicite (120) avec  $\beta_\infty(\varepsilon_n) = \varepsilon_n$ . En fait, ce problème est *doublement* implicite. En effet, si la détermination du point fixe  $\varepsilon_n$  de la fonction  $\varepsilon \mapsto \beta_\infty(\varepsilon)$  introduite par le problème (114), peut être résolue grâce au lemme 15 par un procédé dichotomique, elle exige de pouvoir calculer, pour chaque réel positif  $\varepsilon$ , la valeur  $\beta_\infty(\varepsilon)$  de cette fonction solution de (114). Si, pour tout réel positif  $\varepsilon$ ,  $\Delta_\varepsilon$  désigne l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon : ]0, \infty[ &\longrightarrow ]0, \infty[ \\ \delta &\longmapsto \min_{v \in H^\infty} \|p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

alors le lemme suivant nous fournit un procédé constructif pour calculer les valeurs de la fonction  $\varepsilon \mapsto \beta_\infty(\varepsilon)$  :

**Lemme 17** *Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , l'application  $\Delta_\varepsilon$  est continue et décroissante de  $]0, \infty[$  dans  $]0, \infty[$ .*

Par conséquent, pour tout réel positif  $\varepsilon$ , l'équation implicite  $\Delta_\varepsilon(\delta) = 1$  admet toujours une solution qui n'est autre que  $\beta_\infty(\varepsilon)$  :

$$\forall \varepsilon > 0 : \beta_\infty(\varepsilon) = \Delta_\varepsilon^{-1}(1). \quad (122)$$

De plus puisque l'application  $\Delta_\varepsilon$  est monotone et continue alors une procédure dichotomique suffit pour calculer  $\Delta_\varepsilon^{-1}(1)$ .

**Démonstration du lemme 17:**

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout réel  $\delta > 0$ , la fonction  $p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  appartient à l'algèbre  $H^\infty + C(\mathbb{T})$ . Il existe alors, par les théorèmes (II.6) et (II.2), une unique fonction  $v_\delta \in H^\infty$  telle que

$$\Delta_\varepsilon(\delta) = \|p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = |p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_\delta| \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

Considérons deux réels positifs et distincts  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , et leurs deux fonctions associées  $v_{\delta_1}$  et  $v_{\delta_2}$  de  $H^\infty$ . Puisque  $w_{\frac{1}{\delta_1} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} w_{\frac{1}{\delta_2} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}^{-1} = w_{\frac{\delta_2}{\delta_1} \vee 1}$ , et que par conséquent  $v_{\delta_2} w_{\frac{\delta_2}{\delta_1} \vee 1} \in H^\infty$ ,

$$|p_n w_{\frac{1}{\delta_1} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_{\delta_2} w_{\frac{\delta_2}{\delta_1} \vee 1}| = |w_{\frac{\delta_2}{\delta_1} \vee 1} (p_n w_{\frac{1}{\delta_2} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_{\delta_2})| \leq \Delta_\varepsilon(\delta_2) |\frac{\delta_2}{\delta_1} \vee 1|.$$

Alors

$$\Delta_\varepsilon(\delta_1) \leq \|p_n w_{\frac{1}{\delta_1} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_{\delta_2} w_{\frac{\delta_2}{\delta_1} \vee 1}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \Delta_\varepsilon(\delta_2) \max(\frac{\delta_2}{\delta_1}, 1),$$

soit encore compte tenu des rôles symétriques joués par  $\delta_1$  et  $\delta_2$  :

$$\Delta_\varepsilon(\delta_2) \min(\frac{\delta_2}{\delta_1}, 1) \leq \Delta_\varepsilon(\delta_1) \leq \Delta_\varepsilon(\delta_2) \max(\frac{\delta_2}{\delta_1}, 1). \quad (123)$$

Il en résulte d'une part que l'application  $\Delta_\varepsilon$  est décroissante puisque :

$$\forall \delta_1 > \delta_2 > 0 : \Delta_\varepsilon(\delta_1) \leq \Delta_\varepsilon(\delta_2),$$

et d'autre part que cette application  $\Delta_\varepsilon$  est continue puisque :

$$\forall \delta > 0, \forall \eta > 0 : \delta + \eta > 0 \implies |\Delta_\varepsilon(\delta) - \Delta_\varepsilon(\delta + \eta)| \leq \Delta_\varepsilon(\delta + \eta) \frac{\eta}{\delta}.$$

Il nous reste à démontrer que les limites en 0 et en  $+\infty$  de la fonction continue et décroissante  $\Delta_\varepsilon$  sont respectivement égales à  $+\infty$  et 0.

Soit  $\xi > 0$ . Puisque la fonction  $p_n w_{\frac{1}{\sigma_\varepsilon}} \in H^\infty + C(\mathbb{T})$  et que  $\overline{H^\infty}_{|\mathbb{T} \setminus K}$  contient  $C(\overline{\mathbb{T} \setminus K})$  (cf théorème 2), alors il existe une fonction  $g \in H^\infty$  telle que :

$$\|p_n w_{\frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - g\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} < \xi.$$

Considérons la suite  $(g w_{\frac{1}{n} \vee 1})_{n>0}$  de fonctions de  $H^\infty$ . Pour tout entier positif  $n$ , nous avons :

$$\Delta_\varepsilon(n) \leq \|p_n w_{\frac{1}{n} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - g w_{\frac{1}{n} \vee 1}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

et pour  $n > \frac{1}{\xi} \|p_n w_{1 \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - g\|_{L^\infty(K)}$  nous avons :

$$\Delta_\varepsilon(n) \leq \max \left( \frac{1}{n} \|p_n w_{1 \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - g\|_{L^\infty(K)}, \|p_n w_{1 \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - g\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} \right) < \xi.$$

Par conséquent :

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \Delta_\varepsilon(\delta) = 0.$$

Pour finir, remarquons que, puisque pour tout  $\varepsilon$  positif, nous avons :

$$\Delta_\varepsilon(\delta) = |w_{\frac{1}{\delta} \vee 1}| |p_n w_{1 \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_\delta w_{\delta \vee 1}|$$

et que par conséquent :

$$\|p_n w_{1 \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_\delta w_{\delta \vee 1}\|_{L^\infty(K)} \leq \delta \Delta_\varepsilon(\delta) \quad \text{et} \quad \|p_n w_{1 \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_\delta w_{\delta \vee 1}\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} \leq \Delta_\varepsilon(\delta),$$

alors  $\Delta_\varepsilon(\delta)$  ne peut avoir de limite finie en 0 car sinon la famille  $(v_\delta w_{\delta \vee 1})_{\delta > 0}$  convergerait vers la fonction  $p_n w_{1 \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} \notin H^\infty$  sur  $K$  tout en gardant, en dépit de la proposition 1, une norme finie sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Ainsi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta_\varepsilon(\delta) = \infty.$$

et la démonstration est achevée.  $\square$

### V-3 Résolution numérique du problème pondéré de Nehari

Ainsi, la seconde étape de l'algorithme qui consiste à trouver l'approximant  $f_n$  dans l'algèbre  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  se réduit finalement à la résolution d'une famille  $\left( \text{dist}(p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}, H^\infty) \right)_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \delta > 0}}$  de problème de Nehari.

En effet, la proposition 12 montre que la détermination de  $f_n$  nécessite le calcul de la valeur de  $\varepsilon_n$  et c'est le lemme 15 qui montre que  $\varepsilon_n$  est le point fixe de la fonction  $\varepsilon \mapsto \beta_\infty(\varepsilon)$  et qui par ailleurs, justifie l'utilisation d'une procédure dichotomique sur  $\beta_\infty(\varepsilon)$  pour estimer  $\varepsilon_n$ . Finalement, le lemme 17 montre à son tour que la valeur de  $\beta_\infty(\varepsilon)$  définie comme la solution du problème  $\Delta_\varepsilon(\delta) = 1$ , peut être approchée au moyen d'un schéma dichotomique dont l'étape générique pour  $\varepsilon$  et  $\delta$  donnés, consiste à résoudre le problème de Nehari suivant :

$$\Delta_\varepsilon(\delta) = \min_{v \in H^\infty} \|p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_{\varepsilon, \delta}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \quad (124)$$

Se pose alors le problème de la résolution effective c'est-à-dire numérique du problème pondéré (124) de Nehari. Cette résolution consiste à déterminer, pour l'opérateur de Hankel associé au symbole  $p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$ , la plus grande valeur singulière ainsi que l'un quelconque de ses vecteurs singuliers associés, et nécessite de pouvoir disposer des coefficients de Fourier de la fonction  $p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$ .

Si par construction, nous disposons de l'expression du polynôme  $p_n$ , la manipulation du facteur extérieur  $w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  pose quelques problèmes. Nous allons d'abord donner l'expression de la limite radiale de ce facteur extérieur sur le cercle unité. Ensuite, nous montrerons que les contraintes numériques et techniques nous imposent de *réguler* le symbole  $p_n w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$ . Finalement, nous indiquerons que l'extraction de la plus grande valeur singulière et de l'un de ses valeurs singuliers ne nécessite que le calcul d'une décomposition spectrale en vecteurs et valeurs propres de l'opérateur symétrique de Hankel considéré.

### V-3.1 Limite radiale du facteur extérieur

Posons :

$$\forall t \in [0, 2\pi] : \quad \rho(t) = \frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}(e^{it}).$$

Rappelons que, pour tous réels positifs  $\varepsilon$  et  $\delta$ , le facteur extérieur  $w_\rho$  est défini pour tout  $z \in \mathbb{D}$  par :

$$w_\rho(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \rho(t) dt \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (P_z(t) + i Q_z(t)) \log \rho(t) dt \right\}.$$

Le lemme suivant (cf. [43, chap.6]) nous donne la limite radiale de ce facteur extérieur :

**Lemme 18** *Soit  $r$  une fonction  $\mu$ -Lipschitz sur  $\mathbb{T} \setminus \overline{K}$  avec  $0 < \mu < 1$ . Alors pour tous réels positifs  $\delta$  et  $\varepsilon$  et pour tout point  $z = e^{i\theta}$  de  $\mathbb{T} \setminus \{e^{\pm ia}\}$ , la limite radiale du facteur extérieur  $w_\rho(z)$  est donnée par :*

$$w_\rho(e^{i\theta}) = \lim_{\varrho \rightarrow 1} w_\rho(\varrho e^{i\theta}) = \rho(\theta) \exp \left\{ \frac{-i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log \rho(\theta + t) - \log \rho(\theta - t)}{2 \tan(t/2)} dt \right\}. \quad (125)$$

De plus cette limite radiale est  $\mu$ -Lipschitz sur chacun des intervalles  $K$  et  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$ .

#### Démonstration du lemme 18

Remarquons d'abord que la fonction  $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_z(t) \log \rho(t) dt$  qui n'est autre que  $\log |w_\rho|$  est l'intégrale de Poisson de la fonction  $\log \rho$  continue sur  $\mathbb{T}$  sauf peut-être en  $e^{\pm ia}$  et admet une limite radiale en tout point de  $\mathbb{T} \setminus \{e^{\pm ia}\}$  égale à  $\log \rho$  :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\pm a\} : \quad \log |w_\rho(e^{i\theta})| = \lim_{\varrho \rightarrow 1} \log |w_\rho(\varrho e^{i\theta})| = \log \rho(\theta).$$

Par conséquent, l'étude de la convergence radiale de  $w_\rho$  se réduit à celle de la fonction harmonique  $\psi(z)$  définie pour  $z = \varrho e^{i\theta}$  avec  $0 \leq \varrho < 1$  et  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  par :

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} Q_z(t) \log \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\varrho \sin(\theta - t)}{1 - 2\varrho \cos(\theta - t) + \varrho^2} \log \rho(t) dt$$

et qui n'est autre que la fonction harmonique conjuguée de la fonction  $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_z(t) \log \rho(t) dt$ .

La fonction  $\psi(e^{i\theta})$  suivante :

$$\psi(e^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log \rho(\theta + t) - \log \rho(\theta - t)}{2 \tan(t/2)} dt,$$

est définie sur  $\mathbb{T}$  sauf peut-être en  $e^{\pm ia}$ . Par le théorème [43, Chap.6-thm.1], l'application  $\psi(\varrho e^{i\theta})$  peut être étendue par continuité sur  $\mathbb{T}$  sauf peut-être en  $e^{\pm ia}$  :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\pm a\} : \quad \lim_{\varrho \rightarrow 1} \psi(\varrho e^{i\theta}) = \psi(e^{i\theta}).$$

Finalement, pour tous réels positifs  $\delta$  et  $\varepsilon$  et pour tout point  $e^{i\theta}$  de  $\mathbb{T} \setminus \{e^{\pm ia}\}$ , la limite radiale du facteur extérieur  $w_\rho$  est donnée par :

$$w_\rho(e^{i\theta}) = \rho(\theta) \exp \left\{ \frac{-i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log \rho(\theta + t) - \log \rho(\theta - t)}{2 \tan(t/2)} dt \right\}.$$

De plus, par [29, Chap.III-thm.1.3], cette limite est  $\mu$ -Lipschitz sur chacun des intervalles  $K$  et  $\mathbb{T} \setminus K$ .  $\square$

### V-3.2 Régulation du symbole du problème pondéré

Lorsque  $\delta \neq \varepsilon$ , la limite radiale du facteur extérieur  $w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  hérite d'une discontinuité aux points  $\{e^{\pm i a}\}$ . Cette discontinuité, qui dégrade la vitesse de convergence dans  $L^\infty(\mathbb{T})$  de la série de Fourier associée à  $w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$ , impose, pour bien représenter la fonction  $w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$ , de considérer des séries de Fourier partielles d'ordres élevés et par conséquent de manipuler dans la résolution numérique du problème (124) des matrices de Hankel de rangs élevés. Mais cette difficulté peut être contournée. En effet, le facteur extérieur  $w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  est partout continu sur  $\mathbb{T}$  sauf aux points  $\{e^{\pm i a}\}$  où les limites unilatérales de son module restent finies et si  $p$  est le polynôme de premier degré qui coïncide avec  $p_n$  en ces points  $\{e^{\pm i a}\}$ , alors la fonction *régulée*  $(p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  est continue sur tout  $\mathbb{T}$ . Par ailleurs la solution  $v_{\varepsilon, \delta, p}$  du problème de Nehari suivant :

$$\Delta_\varepsilon(\delta) = \min_{v \in H^\infty} \|(p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|(p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} - v_{\varepsilon, \delta, p}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}, \quad (126)$$

n'est autre que la translatée par  $p w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  de la solution  $v_{\varepsilon, \delta}$  du problème de Nehari (124) :

$$v_{\varepsilon, \delta} = v_{\varepsilon, \delta, p} + p w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}.$$

Les trois lemmes suivants résument les principales propriétés de la fonction  $(p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  :

**Lemme 19** *La fonction  $(p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  est  $\mu$ -Lipschitz sur  $\mathbb{T}$ .*

Remarquons d'abord que le polynôme  $p_n - p$  est une fonction continûment différentiable sur  $\mathbb{T}$  et par conséquent  $\mu$ -Lipschitz sur  $\mathbb{T}$ . Rappelons par ailleurs que les restrictions à  $K$  et à  $\mathbb{T} \setminus K$  de la fonction  $w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}} = w_\rho$  sont  $\mu$ -Lipschitz sur chacun des intervalles  $K$  et  $\mathbb{T} \setminus K$ . Il en résulte que la fonction  $(p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  est  $\mu$ -Lipschitz sur chacun des intervalles  $K$  et  $\mathbb{T} \setminus K$ . Il existe donc deux constantes positives  $A_K$  et  $A_{\mathbb{T} \setminus K}$  tel que :

$$\left| (p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z_2) - (p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z_1) \right| = \begin{cases} A_K |z_2 - z_1|^\mu & \text{sur } K \\ A_{\mathbb{T} \setminus K} |z_2 - z_1|^\mu & \text{sur } \mathbb{T} \setminus K. \end{cases} \quad (127)$$

Pour finir la démonstration du lemme, considérons deux points  $z_1 \in K$  et  $z_2 \in \mathbb{T} \setminus K$ . Soit  $z_0$  l'un des deux points  $e^{\pm i a}$  choisi tels que les trois points  $z_1$ ,  $z_0$  et  $z_2$  appartiennent à un même demi-cercle de sorte que

$$|z_1 - z_0| \leq |z_2 - z_1| \quad \text{et} \quad |z_2 - z_0| \leq |z_2 - z_1|$$

Alors, puisque  $(p_n - p)(z_0) = 0$  et compte tenu de (127), il en résulte que

$$\begin{aligned} & |(p_n - p) w_\rho(z_2) - (p_n - p) w_\rho(z_1)| \\ & \leq |(p_n - p) w_\rho(z_2) - (p_n - p) w_\rho(z_0) + (p_n - p) w_\rho(z_0) - (p_n - p) w_\rho(z_1)| \\ & \leq A_K |z_1 - z_0|^\mu + A_{\mathbb{T} \setminus K} |z_2 - z_0|^\mu \end{aligned}$$

et par conséquent, pour tous points  $z_1$  de  $K$  et  $z_2$  de  $\mathbb{T} \setminus K$ , nous avons :

$$\left| (p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z_2) - (p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}(z_1) \right| \leq \max(A_K, A_{\mathbb{T} \setminus K}) |z_2 - z_1|^\mu. \quad (128)$$

La combinaison des relations (127) et (128) montre que l'application  $(p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  est  $\mu$ -Lipschitz sur tout le cercle  $\mathbb{T}$ .  $\square$

**Lemme 20** *Si la fonction  $r$  est deux fois continûment différentiable sur  $\overline{\mathbb{T} \setminus K}$  alors la fonction  $(p_n - p) w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  est dans l'algèbre de Wiener  $\mathcal{W}$ .*

Soit  $m$  un entier positif tel que  $z^m(p_n - p)$  soit dans  $H^\infty$ . Il résulte des deux lemmes 18 et 19 que la fonction  $z^m(p_n - p)w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  admet une limite radiale continue donnée par :

$$z^m(p_n - p)w_\rho(e^{i\theta}) = e^{im\theta}(p_n - p)(e^{i\theta})\rho(\theta) \exp \left\{ \frac{-i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log \rho(\theta + t) - \log \rho(\theta - t)}{2 \tan(t/2)} dt \right\},$$

avec

$$\forall t \in [0, 2\pi] : \quad \rho(t) = \frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}(e^{it}).$$

Nous allons montrer que la fonction  $\psi$  suivante définie pour tout  $\theta$  de  $[0, 2\pi] \setminus \{\pm a\}$  par :

$$\psi(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log \rho(\theta + t) - \log \rho(\theta - t)}{2 \tan(t/2)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log \rho(\theta + t) - \log \rho(t)}{\tan(t/2)} dt,$$

est différentiable à l'intérieur de chacun des intervalles  $K$  et  $\mathbb{T} \setminus K$ . En effet, la fonction  $\alpha$  définie par :

$$\alpha(t, \theta) = \frac{\log \rho(\theta + t) - \log \rho(t)}{\tan(t/2)} \quad \forall (t, \theta) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \setminus \{\pm a\},$$

est continue sur  $[-\pi, \pi] \times \overset{\circ}{K}$  et sur  $[-\pi, \pi] \times \mathbb{T} \setminus K$ . De plus sa dérivée partielle  $(t, \theta) \mapsto \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(t, \theta)$  est continue sur  $[-\pi, \pi] \times \overset{\circ}{K}$  et sur  $[-\pi, \pi] \times \mathbb{T} \setminus K$ . Il résulte de [66, Tom.3-thm. pp. 308] la différentiabilité annoncée de l'application  $\psi$ .

Par conséquent, la limite radiale de la fonction  $z^m(p_n - p)w_\rho$  est différentiable sur chacun des intervalles  $\overset{\circ}{K}$  et  $\mathbb{T} \setminus K$  et compte tenu de sa continuité sur tout  $\mathbb{T}$ , cette limite radiale est Lipschitz. En vertu du théorème de Hardy-Littlewood [25, thm5.1] ceci est équivalent au fait que la dérivée de la fonction  $z^m(p_n - p)w_\rho$  est dans  $H^\infty$ . Finalement, compte tenu du théorème de Hardy-Littlewood [43, chap5-thm-pp.71], cette fonction  $z^m(p_n - p)w_\rho$ , et par conséquent la fonction  $(p_n - p)w_\rho$  sont dans l'algèbre de Wiener.  $\square$

**Lemme 21** Soit  $f$  de l'algèbre de Wiener  $\mathcal{W}$ . Soit  $J_{n,m}$  (resp.  $V_{n,m}$ ) le polynôme de Jackson (resp. de la Vallée Poussin) associé à  $f$  aux points équirépartis fondamentaux  $(\frac{2\pi k}{m})_{0 \leq k < m}$ . Alors le polynôme  $J_{n,m}$  (resp.  $V_{n,m}$ ) converge vers  $f$  dans l'algèbre de Wiener lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $m$  restant plus grand que  $n$  (resp.  $2n$ ).

#### Démonstration du lemme 21

La convergence recherchée est une conséquence du théorème [83, thm.5.16] et du fait que, par sommation de césaro, les polynômes de Jackson définition [83, (6.5)-p.22] vérifient de même

$$\|f - J_{n,m}\|_{\mathcal{W}} \leq 2 \sum_{|k| > n} |a_k|$$

### V-3.3 Décomposition spectrale d'une matrice de Hankel

La méthode classique (voir V-2.3) pour résoudre le problème générique (126), est de procéder à une décomposition en valeurs singulières SVD (pour Singular Value Decomposition) de (la troncature de) la matrice de Hankel  $H$  associée à une approximation polynomiale  $\hat{p}_{m(n)}$  d'ordre  $m(n)$  du symbole  $(p_n - p)w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$ . Nous ferons appel aux polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin pour construire une telle approximation  $\hat{p}_{m(n)}$ . Ces polynômes nous garantissent en outre la convergence robuste dans son ensemble.

Plus précisément, considérons le problème de Nehari suivant :

$$\hat{\Delta}_\varepsilon(\delta) = \min_{v \in H^\infty} \|\hat{p}_{m(n)} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|\hat{p}_{m(n)} - \hat{v}_{\varepsilon, \delta, p, m(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}, \quad (129)$$



dont la solution  $\hat{v}_{\varepsilon,\delta,p,m(n)}$  est donnée par (voir V-2.3)

$$\hat{v}_{\varepsilon,\delta,p,m(n)} = \hat{p}_{m(n)} - \frac{Hx}{x},$$

où  $x$  est un vecteur maximisant dont l'existence est assurée par la finitude du rang de la matrice de Hankel  $H$ .

Nous supposons que la fonction  $r$  vérifie l'hypothèse de régularité du lemme 20. Il résulte des lemmes 20 et 21, que la suite des polynômes  $(\hat{p}_{m(n)})_{n>0}$  converge dans l'algèbre de Wiener  $\mathcal{W}$  vers la fonction  $(p_n - p)w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$ . Observons d'abord que cette régularité imposée à la fonction  $r$  n'est pas de nature à modifier le problème extrémal borné que nous étudions. En effet, il est toujours possible d'approximer la fonction  $r$  et à une précision arbitraire par une fonction ayant la régularité requise et telle que la convergence robuste ne soit altérée.

Nous supposons par ailleurs, que l'opérateur de Hankel de symbole  $(p_n - p)w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  admet une unique plus grande valeur singulière de sorte que, par [36, thm.6], l'opérateur d'approximation  $\hat{p}_{m(n)} \mapsto \hat{v}_{\varepsilon,\delta,p,m(n)}$  soit continu dans l'algèbre de Wiener  $\mathcal{W}$  et que par conséquent, l'approximant  $\hat{v}_{\varepsilon,\delta,p,m(n)}$  converge dans  $\mathcal{W}$  vers  $v_{\varepsilon,\delta,p}$  lorsque  $\hat{p}_{m(n)}$  converge vers  $(p_n - p)w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$ .

*Nous supposons par la suite que  $\hat{p}_{m(n)}$  reste suffisamment proche de  $(p_n - p)w_{\frac{1}{\delta} \vee \frac{1}{\sigma_\varepsilon}}$  pour confondre numériquement  $\hat{v}_{\varepsilon,\delta,p,m(n)}$  avec  $v_{\varepsilon,\delta,p}$  et  $\hat{\Delta}_\varepsilon(\delta)$  avec  $\Delta_\varepsilon(\delta)$  respectivement.*

Finalement, indiquons que l'approche classique pour déterminer un tel vecteur maximisant  $x$  de la matrice de Hankel  $H$  est de procéder à une décomposition SVD de  $H$  sous la forme :

$$H = U \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_l) V^*,$$

où  $U$  et  $V$  sont deux matrices normales et où  $\sigma_1, \dots, \sigma_l$  sont les valeurs singulières de  $H$  (racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique  $H^*H$ ). En effet, compte tenu de la relation [32] :

$$H v_1 = \sigma_1 u_1,$$

où  $u_1$  et  $v_1$  désignent les premières colonnes respectivement de  $U$  et de  $V$ , le vecteur unitaire  $v_1$  est un vecteur maximisant associé à la plus grande valeur singulière  $\sigma_1$  qui est par ailleurs égale à la norme  $\Delta_\varepsilon(\delta)$  de la matrice de Hankel  $H$ .

L'utilisation de l'algorithme [32, 8.3.2] permet d'obtenir, à partir de la décomposition QR, une telle décomposition en valeurs singulières, dite SVD, de la matrice  $H$  [17]. Les relations [32, 8.3] entre la décomposition SVD de la matrice  $H$  et les décompositions de Schur des matrices symétriques  $H^*H$  et  $HH^*$ , à savoir :

$$H^*H = V \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_l^2) V^*, \quad HH^* = U \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_l^2) U^*,$$

conduisent à un autre algorithme de décomposition en valeurs singulières [48, théo.66], qui permet de se limiter à une simple décomposition de Schur pour extraire les seuls éléments intervenant dans l'expression de  $v_{\varepsilon,\delta,p}$ , à savoir la norme donnée par  $\sigma_1$  et un vecteur maximisant,  $v_1$  par exemple, pour la matrice de Hankel  $H$ .

## V-4 Schéma global de l'algorithme d'identification

### Interpolation des données :

à partir des données initiales, calculer une approximation (ou une interpolation) polynômiale  $p_n$  par les polynômes de Jackson ou de la Vallée Poussin (cf. §V-1).

Calculer ensuite le polynôme régulateur  $p$  (cf. §V-3.2).

**Approximation dans  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  :**

par dichotomie sur les valeurs de l'application  $\varepsilon \mapsto \beta_\infty(\varepsilon)$ , choisir la valeur du réel  $\beta_\infty$  de  $\varepsilon$  la plus proche possible, à une précision donnée, du point fixe  $\beta_\infty$  (cf. lemme 15).  
L'initialisation cette dichotomie consiste à trouver deux réels positifs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  tels que :

$$\beta_\infty(\varepsilon_1) > \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \beta_\infty(\varepsilon_2) < \varepsilon_2.$$

Pour chaque réel positif  $\varepsilon$ , la valeur de  $\beta_\infty(\varepsilon)$  est donnée par (cf. équation (122)) :

$$\beta_\infty(\varepsilon) = \Delta_\varepsilon^{-1}(1).$$

Pour la calculer, le lemme 17 autorise le schéma dichotomique suivant :

- Trouver deux réels  $\delta_1$  et  $\delta_2$  tels que

$$\Delta_\varepsilon(\delta_1) > 1 \quad \text{et} \quad \Delta_\varepsilon(\delta_2) < 1.$$

- Par dichotomie sur les valeurs de l'application  $\Delta_\varepsilon$ , choisir la valeur  $\beta_\infty(\varepsilon)$  de  $\delta$  qui vérifie à une précision donnée :

$$\Delta_\varepsilon(\beta_\infty(\varepsilon)) = 1$$

**Résolution finale :**

la solution  $f_n$  du problème (107) est donné par (cf. proposition 12) :

$$f_n = p + v_{\beta_\infty, \beta_\infty, p} w_{\beta_\infty \vee \sigma_{\beta_\infty}},$$

où  $v_{\beta_\infty, \beta_\infty, p}$  est la solution du problème de Nehari suivant :

$$\min_{v \in H^\infty} \|(p_n - p) w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\beta_\infty}}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|(p_n - p) w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\beta_\infty}}} - v_{\beta_\infty, \beta_\infty, p}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1.$$

**V-5 Estimation de l'erreur d'approximation**

Rappelons que nous avons construit le polynôme trigonométrique  $p_n$  à partir des points  $a_{-n-n'}, \dots, a_{n+n'}$  et que  $f_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\beta_\infty}}}$  est la solution du problème de Nehari associé à  $p_n w_{\frac{1}{\beta_\infty} \vee \frac{1}{\sigma_{\beta_\infty}}}$ .  
Compte tenu de (121) nous avons :

$$|f - f_n| \leq |f - p_n| + \beta_\infty \quad \text{et} \quad |h - f_n| \leq |h - p_n| + r + \beta_\infty.$$

Par ailleurs, grâce à la convergence robuste de  $p_n$  vers  $f \vee h$ , nous avons (voir la fin de démonstration de la proposition 12) :

$$\beta_\infty \leq \|f \vee h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Ceci nous permet d'estimer l'erreur d'approximation finale sur  $K$  et sur  $\mathbb{T} \setminus K$  comme suit :

$$\begin{cases} \|f - f_n\|_{L^\infty(K)} \leq \|f - p_n\|_{L^\infty(K)} + \|f \vee h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq 2 \|f \vee h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ |h - f_n|_{\mathbb{T} \setminus K} \leq r + \|h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T} \setminus K)} + \|f \vee h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq r + 2 \|f \vee h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}, \end{cases}$$

mais aussi l'écart de l'approximant  $f_n$  à  $f$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  puisque :

$$|f - f_n|_{\mathbb{T} \setminus K} \leq |f - h|_{\mathbb{T} \setminus K} + |h - f_n|_{\mathbb{T} \setminus K} \leq 2r + 2 \|f \vee h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Pour compléter ces calculs d'erreur, il nous reste à estimer  $\|f \vee h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ . Pour cela, si  $\|\eta_k\|_\infty \leq \epsilon$ , alors, par définition et compte tenu de la relation (106), nous avons respectivement :

$$\begin{cases} |f(z_k) - a_k| = |\eta_k| \leq \epsilon & \text{pour } |k| \leq n \\ |h(z_k) - a_k| = |e_{\eta_k}| \leq \frac{2\epsilon}{\sin \alpha} & \text{pour } n < |k| \leq n + n'. \end{cases}$$

Il en résulte que les mesures  $a_{-n-n'}, \dots, a_{n+n'}$  peuvent être considérées comme les valeurs de la fonction  $f \vee h$  avec une erreur de mesure au plus égale à  $\frac{2\epsilon}{\sin a}$ . Si  $p_n$  désigne le polynôme de la Vallée Poussin  $V_{s,m}$  construit à partir de  $m$  points parmi  $a_{-n-n'}, \dots, a_{n+n'}$ , alors, compte tenu de la proposition 11, nous avons :

$$\|f \vee h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \left(4 + \frac{2}{s}\right) \left(E_s(f \vee h, P_s) + \frac{2\epsilon}{\sin a}\right)$$

où  $P_s$  désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à  $s$ . Rappelons par ailleurs que par le théorème de Jackson [64, thm.16.4], nous avons :

$$E_s(f \vee h, P_s) \leq \frac{3}{2} \omega_{f \vee h}\left(\frac{\pi}{s+1}\right)$$

où  $\omega_u$  désigne le module de continuité de l'application  $u$  défini par :

$$\omega_u(\alpha) \leq \sup_{|\theta - \phi| \leq \alpha} |u(e^{i\theta}) - u(e^{i\phi})|.$$

Finalement, compte tenu de la définition de  $f \vee h$ , nous avons,

$$E_s(f \vee h, P_s) \leq \frac{3}{2} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \left[ \omega_f\left(\frac{\lambda \pi}{s+1}\right) + (1-\lambda) \frac{\pi}{s+1} \frac{\|f\|_{L^\infty(K)}}{\sin a} \right].$$

Remarquons que ces majorations de l'erreur d'approximation  $\|f - f_n\|_{L^\infty(K)}$  sur  $K$  et  $|h - f_n|$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  obéissent aux conclusions de la proposition 12 et montrent en particulier l'importance de la convergence robuste de l'erreur d'interpolation (ou d'approximation)  $\|f \vee h - p_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$  de la première étape.

## Chapitre VI

# Applications et résultats numériques

Dans ce chapitre, nous allons *montrer*, quelques courbes à l'appui (!), comment l'étude du problème extrémal borné et du problème de la complétion analytique bornée peut être motivée et utile pour la résolution du problème d'identification harmonique partielle.

Rappelons que dans les problèmes d'identification harmonique de systèmes linéaires que nous considérons ici, nous ne disposons que de données ponctuelles. Ces données correspondent aux mesures, éventuellement bruitées, de la fonction de transfert  $f$ , effectuées en un ensemble fini de fréquences de la bande (passante) du système.

Nous allons considérer deux exemples de données, l'un provenant de données expérimentales *réelles*, l'autre plus académique. Le premier exemple provient d'un filtre hyperfréquence du CNES caractérisé par 801 mesures fréquentielles. Le schéma suivant résume ces données ponctuelles après leur transfert sur l'arc  $K = e^{i[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}$  par la transformation de Möbius.

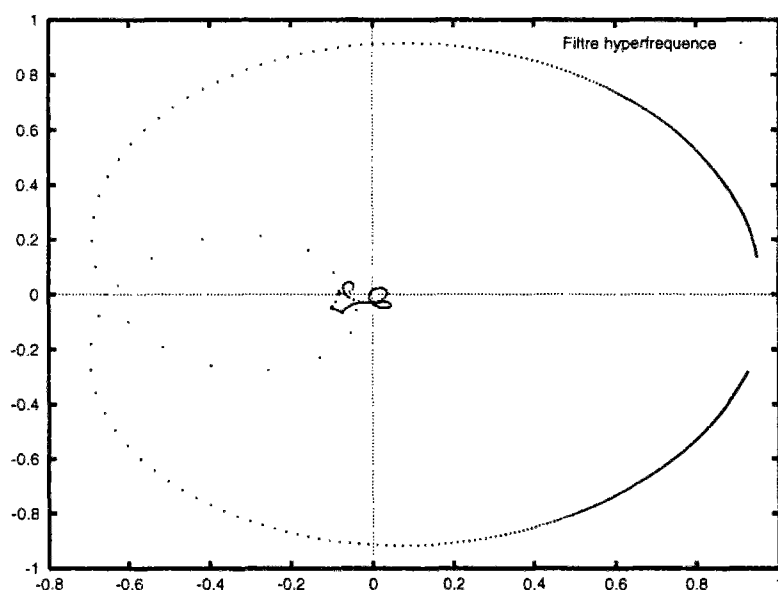


FIG. 2 – Données fréquentielles du filtre sur  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .

Le second exemple consiste en des données initiales sont les valeurs de la fonction  $f(z) = \frac{3(z^2+1)}{z^2+2z+5}$  calculées en 524 points de l'arc  $[1.5, 2\pi - 1.5]$ . Ceci va nous permettre d'étudier certains paramètres que nous avons déjà mis en évidence dans la formulation du problème de l'identification des données partielles (cf. chapitre V), à savoir les fonctions  $h$  et  $r$ . Rappelons que cette fonction  $f$  a fait l'objet de plusieurs études relatives aux problèmes d'identification robuste sur tout le cercle  $\mathbb{T}$ .

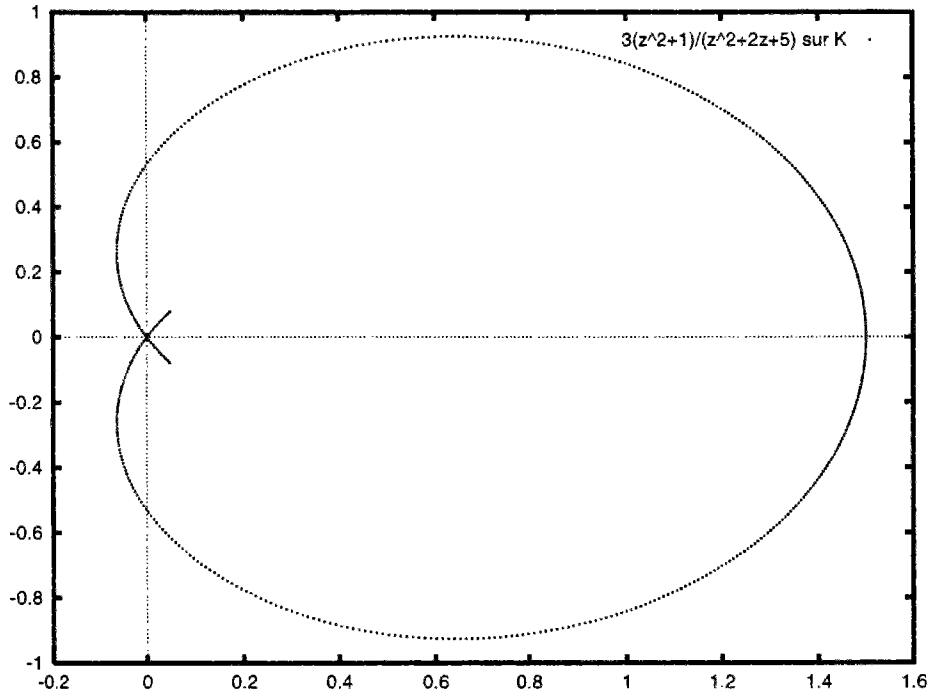


FIG. 3 -  $f(z) = \frac{3(z^2+1)}{z^2+2z+5}$  sur  $[1.5, 2\pi - 1.5]$ .

Nous allons tout d'abord présenter quelques résultats concernant le problème d'identification fréquentielle à partir de données sur une bande du système; puis nous montrerons comment le problème de la complétion analytique bornée trouve une motivation possible dans ces problèmes d'identification. Finalement, nous donnerons quelques résultats sur l'utilisation des polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin dans l'interpolation et l'approximation des données ponctuelles.

Rappelons que l'identification robuste  $H^\infty$  telle qu'elle a été décrite dans [34, 40, 56, 58] et dont nous avons étudié la généralisation sur une bande stricte de fréquences, consiste pour un système linéaire à déterminer sur cette bande à partir des données expérimentales fréquentielles ponctuelles et bruitées, un modèle stable et robuste dont le comportement en dehors de cette bande reste contrôlé. L'élaboration de modèles dans  $H^\infty$  caractérise la notion de stabilité exigée du système. La robustesse, quant à elle, traduit un comportement fiable du modèle, au sens où ce dernier est d'autant plus près du système réel que le bruit s'atténue et que les points de mesure couvrent toute la bande du système.

Nous avons vu que la complétion analytique bornée dans  $H^2$  permet d'étendre des données sur  $K$  à tout le cercle de façon à ce que cette extension soit aussi proche que possible de  $H^2$ . Ceci permet ainsi d'estimer l'énergie non mesurée du système en dehors de sa bande et d'évaluer la validité de l'hypothèse de linéarité du système.

## VI-1 Identification des données fréquentielles partielles

Cette identification consiste à trouver, parmi une classe de modèles, celui qui représente au mieux ces données. La nature de cette classe et la définition de notion associée de représentation des données déterminent le type d'identification recherché. Dans l'exemple du filtre hyperfréquence par exemple, l'identification  $H^\infty$  des données fréquentielles partielles consiste d'abord à choisir une famille de fonctions (de transfert) dans  $H^\infty$  pouvant représenter des filtres hyperfréquences ; puis à déterminer, parmi ces fonctions, une approximation stable qui soit la plus proche possible de ces données sur  $K$ .

Il est essentiel de constater la nature partielle des données disponibles et de remarquer que le choix de cette famille d'approximants traduit, comme nous le détaillerons par la suite, une tentative de compléter ces données sur tout le cercle  $\mathbb{T}$ . Ce choix reflète nécessairement l'importance accordée aux données absentes ainsi que la confiance attribuée ou imposée à toute information *a priori* sur le comportement souhaitée ou imposée au filtre (ou plus généralement à la fonction de transfert du système) sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

En effet, si cette famille d'approximants est l'un des espaces  $H^\infty$  ou  $H^2$ , c'est-à-dire lorsque le comportement du filtre en dehors de l'intervalle de mesures est complètement ignoré, alors les résultats de densité (cf. théorème 1 et 2) rendent ce problème d'identification partielle mal posé puisqu'il est toujours possible d'approximer ces données à une précision arbitraire sur  $K$  mais au prix d'un comportement non borné sur  $\mathbb{T} \setminus K$  (cf. proposition 1) ce qui ne correspond guerre à la stabilité attendue du filtre à identifier.

Au contraire, le comportement supposé du système sur  $\mathbb{T} \setminus K$  peut être considéré avec la même importance que les mesures sur  $K$ . Cette approche simple et directe consiste à compléter arbitrairement ces données partielles sur tout le cercle  $\mathbb{T}$  puis à calculer et à comparer les meilleures approximations dans  $H^2$  ou dans  $H^\infty$ . Considérons les deux complétions  $h_1$  et  $h_2$  suivantes de la fonction  $f|_K$  :

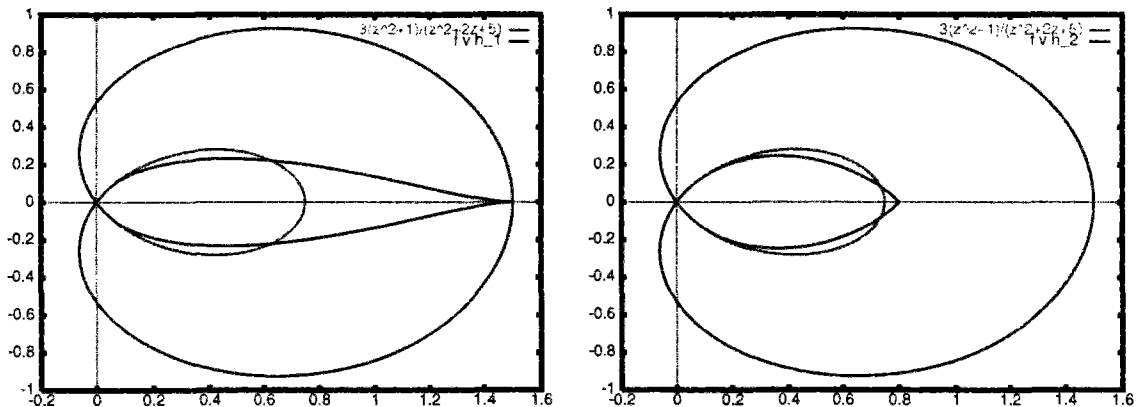


FIG. 4 -  $f(z) = \frac{3(z^2+1)}{z^2+2z+5}$ ,  $f|_K \vee h_1$  et  $f|_K \vee h_2$ .

Calculons les meilleures approximations stables, dans  $H^2$  et  $H^\infty$  associées à ces fonctions  $f \vee h_1$  et  $f \vee h_2$ . Dans  $H^2$ , les meilleures approximations correspondent aux projections sur  $H^2$  des fonctions  $f \vee h_1$  et  $f \vee h_2$ . Dans  $H^\infty$ , ces approximations sont obtenues par la résolution de deux problèmes de Nehari de symboles respectifs  $f \vee h_1$  et  $f \vee h_2$ .

Les figures suivantes résument les résultats de cette première approche :

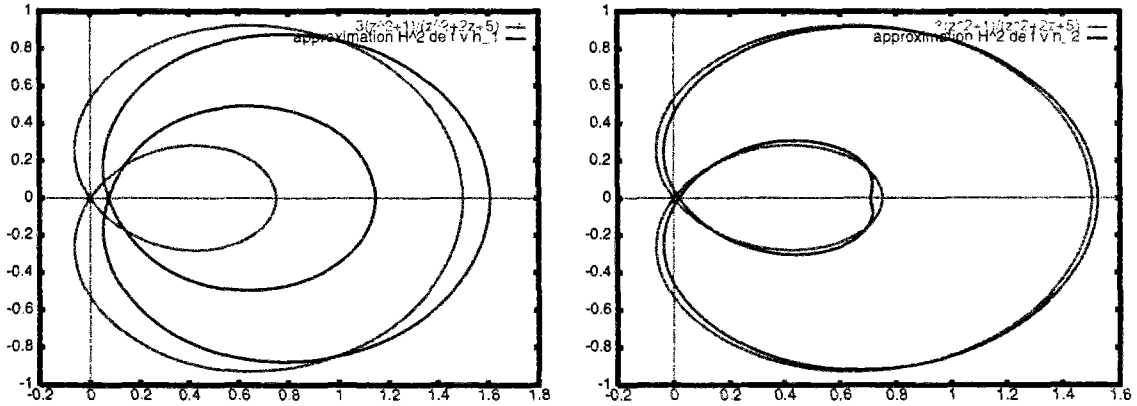


FIG. 5 -  $\text{dist}(f \vee h_1, H^2) = 0.2290$  et  $\text{dist}(f \vee h_2, H^2) = 0.0058$ .

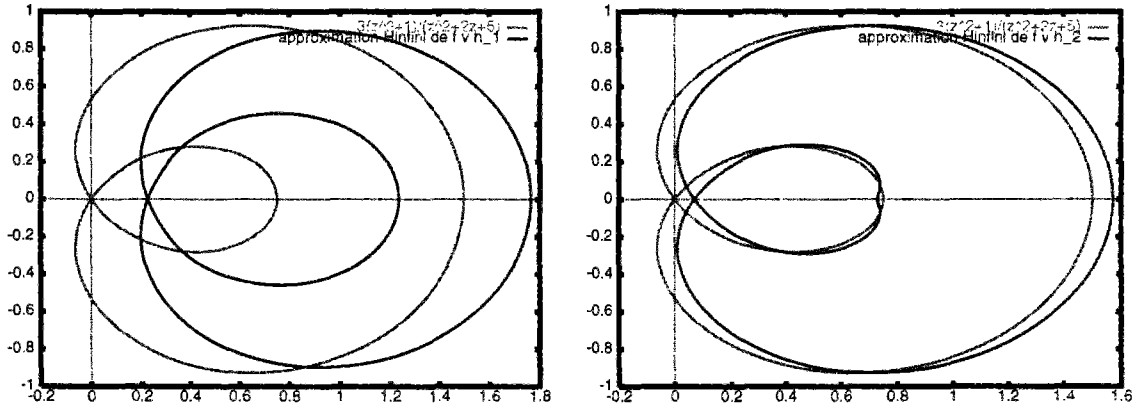


FIG. 6 -  $\text{dist}(f \vee h_1, H^\infty) = 0.2647$  et  $\text{dist}(f \vee h_2, H^\infty) = 0.0071$

Comme nous pouvons le constater, les résultats obtenus dans  $H^2$  et dans  $H^\infty$  ne peuvent être considérés comme de *bonnes* approximations de  $f|_K$ . Ceci est dû principalement au fait que, dans cette approche et comme attendu, les procédures d'approximation ne distinguent guère entre les données réelles définissant  $f|_K$  et les données supposées sur le comportement *a priori* de  $f$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Par ailleurs, les résultats obtenus montrent la sensibilité des approximants par rapport à la qualité du comportement adopté sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

Par conséquent, il est indispensable de préciser, dans la définition de cette famille d'approximants admissibles, la nature de l'information supplémentaire portant sur les données manquantes c'est-à-dire sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Introduisons cette information sous la forme d'un comportement de référence  $h$  que l'on pondère par une constante  $M$  traduisant la confiance attribuée à la fonction  $h$  pour représenter les données sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Si l'on ne sait rien, on peut toujours prendre  $h = 0$  et  $M$  grand. Définissons alors la famille d'approximants comme l'ensemble des fonctions  $g$  de  $H^2$  ou  $H^\infty$  dont l'écart en norme à  $h$  est au plus égal à  $M$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . L'étude du problème extrémal borné associé à ce problème d'identification harmonique partielle montre que les deux paramètres  $h$  et  $M$  permettent la distinction recherchée entre les données expérimentales sur  $K$  et le comportement souhaité ou imposé avec une certaine tolérance sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . En effet, remarquons que le paramètre  $\lambda$  dans l'expression (39) et le facteur extérieur  $w_{\beta_\infty} \frac{M}{\sqrt{1}}$  dans l'expression (26) des solutions du problème extrémal borné respectivement dans  $H^2$  et dans  $H^\infty$ , peuvent être interprétés comme des pondérations des deux fonctions  $f$  sur  $K$  et  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

Les quantités  $h$  et  $M$  sont ainsi les deux paramètres du problème extrémal borné ou d'une façon équivalente du problème d'identification harmonique partielle. L'ajustement de ces deux paramètres nous permet de configurer l'allure de l'approximant sur  $K$  et sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Nous allons montrer que pour chaque choix d'une complétion  $h$ , l'accroissement de l'amplitude de  $M$  améliore la qualité de l'approximation sur  $K$  ; réciproquement, la diminution de l'amplitude de la tolérance  $M$  augmente l'écart entre l'approximant et les données sur  $K$ . Finalement, une bonne intuition de la complétion  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  diminue l'amplitude de gabarit  $M$  nécessaire à une bonne approximation des données sur  $K$ .

Dans l'exemple du filtre hyperfréquence du CNES, l'identification  $H^\infty$  des données fréquentielles partielles consiste d'abord à choisir un comportement de référence  $h$  pour  $f$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  et une tolérance  $M$  ; puis à déterminer une approximation stable qui soit la plus proche possible de ces données ponctuelles sur  $K$  et qui reste sur  $\mathbb{T} \setminus K$  à une distance au plus égale à  $M$  de cette fonction  $h$ .

La figure 7 ci-contre représente les données après complétion à *vue d'oeil* ainsi que l'approximant  $H^\infty$  solution du problème de Nehari classique. Comme nous pouvons le constater, ici aussi, la solution ainsi calculée ne constitue pas une bonne approximation des données sur  $K$ . En effet, compte tenu du fait que l'erreur d'approximation est circulaire, cette approche ne permet pas de distinguer entre les données expérimentales sur  $K$  et le comportement *a priori* sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

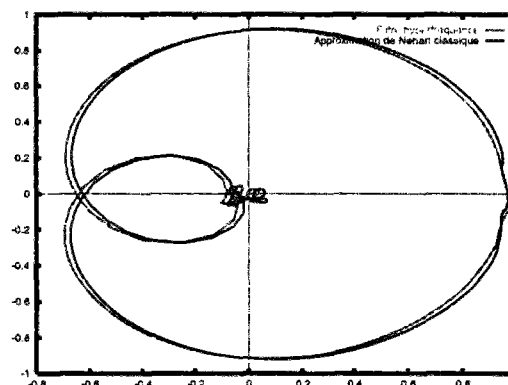


FIG. 7 - La distance à  $H^\infty$  vaut 0.0236

Nous avons démontré au chapitre V qu'en associant un problème extrémal borné à ce problème d'identification, une telle distinction devient possible comme le montre la figure 8 ci-contre où la qualité de l'approximation sur  $K$  est donnée par  $\beta_\infty$ . Notons cependant que, lorsque la contrainte est partout constante et égale à  $M$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ , la solution obtenue est discontinue aux extrémités de  $K$  (à moins que  $M = \beta_\infty$  et dans ce cas le problème extrémal borné n'est autre qu'un problème de Nehari classique).

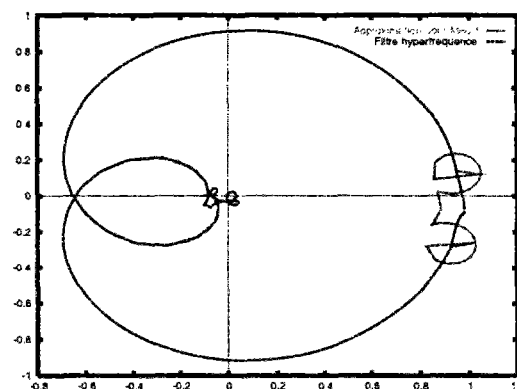


FIG. 8 -  $\beta_\infty = 0.00075$  ;  $M = 0.1$

Pour obtenir une solution continue sur  $\mathbb{T}$ , il convient donc, comme détaillé dans la section V-2, de prendre une contrainte  $r$  variable. Pour la même complétion qu'à la figure 8, les figures suivantes représentent les solutions du problème extrémal borné dans  $H^\infty$  pour 3 choix  $r_1, r_3$  et  $r_6$  de gabarit  $r$  :



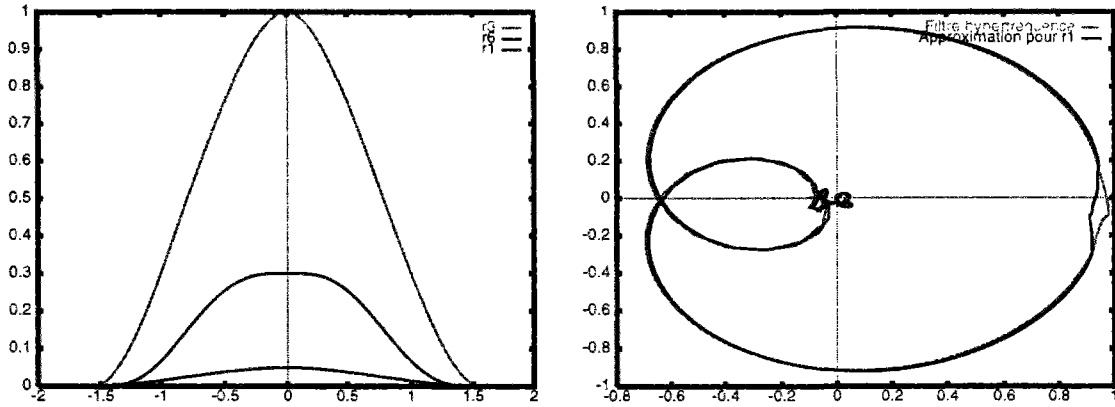


FIG. 9 –

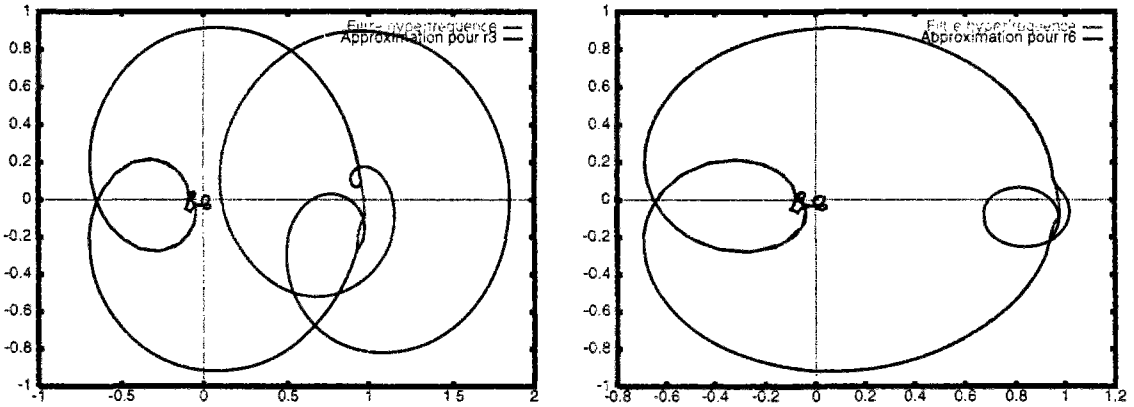


FIG. 10 –

Ainsi, en ajustant les deux paramètres  $h$  et  $r$ , il est possible de choisir un compromis entre la qualité de l'approximation des données sur  $K$  et l'allure de l'approximant sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Cet ajustement nécessite de résoudre le problème extrémal borné pour un certain nombre de valeurs de ces paramètres avant de pouvoir en sélectionner un couple de paramètres satisfaisant le compromis souhaité.

Il est alors légitime de s'interroger sur l'existence d'un couple de valeurs optimales de ces paramètres  $h$  et  $r$  pour bon ajustement du compromis. Le choix simultané de ces deux paramètres est un problème difficile.

En revanche, lorsque le paramètre  $h$  est fixé, l'appréciation de ce compromis se traduit généralement par des critères visuels sur la qualité de l'approximation des données sur  $K$  et sur l'allure et l'amplitude de celle-ci sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Ceci consiste en la résolution d'une série de problèmes extrémaux bornés pour différentes valeurs de  $r$ . Néanmoins, lorsque les données sont les valeurs d'une fonction  $f$  de  $H^\infty$ , la fonction  $|f|_{\mathbb{T} \setminus K} - h|$  constitue un bon choix pour le paramètre  $r$  puisque l'approximant ainsi calculé n'est autre que la fonction  $f$  initiale sur tout le cercle unité  $\mathbb{T}$ .

Les figures suivantes montrent l'exemple de la fonction  $f(z) = \frac{3(z^2+1)}{z^2+2z+5}$  où les approximations sont calculées pour les valeurs  $r = |f|_{\mathbb{T} \setminus K} - h_1|$  et  $r = |f|_{\mathbb{T} \setminus K} - h_2|$ . Un tel choix de la fonction  $r$  n'est possible que si la fonction  $f$  est entièrement connue sur tout le cercle  $\mathbb{T}$ . Ces résultats, outre

le fait qu'ils constituent une vérification des procédures de calcul, illustrent le fait que le problème extrémal borné constitue une généralisation du problème extrémal classique.

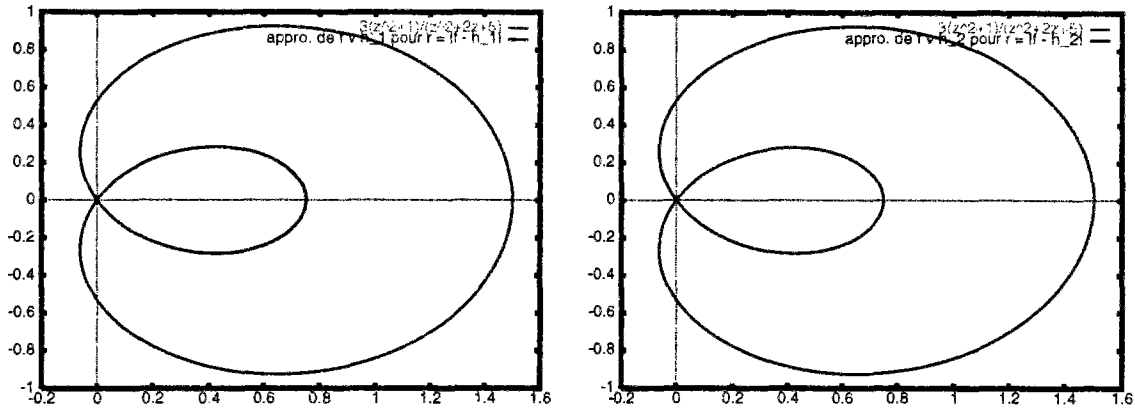


FIG. 11 -

Considérons maintenant le cas où on cherche à ajuster le seul paramètre  $h$  entendu comme la détermination d'une meilleure complétion au sens de la distance à  $H^p$  des données par des fonctions de norme au plus égale une contrainte. C'est donc un problème de complétion analytique bornée tel qu'il a été introduit dans le chapitre III et où la fonction  $f$  correspond ici à une interpolation ou une approximation des données sur  $K$ .

## VI-2 Complétion analytique bornée

Dans l'espace de Hardy  $H^2$  et pour une contrainte constante  $C$ , la complétion analytique bornée  $\tilde{h}$  de toute fonction  $f|_K$  de  $L^2(K)$  est donnée par (voir §III-4.1) :

$$\tilde{h} = (\rho I - \mathbf{T})^{-1} P_{H^2}(\chi_K f),$$

où  $\rho$  est un réel de  $]1, \infty[$  choisi tel que  $\|\tilde{h}\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)} = C$ . Les figures suivantes donnent l'allure de cette complétion pour diverses valeurs de la contrainte  $C$ .

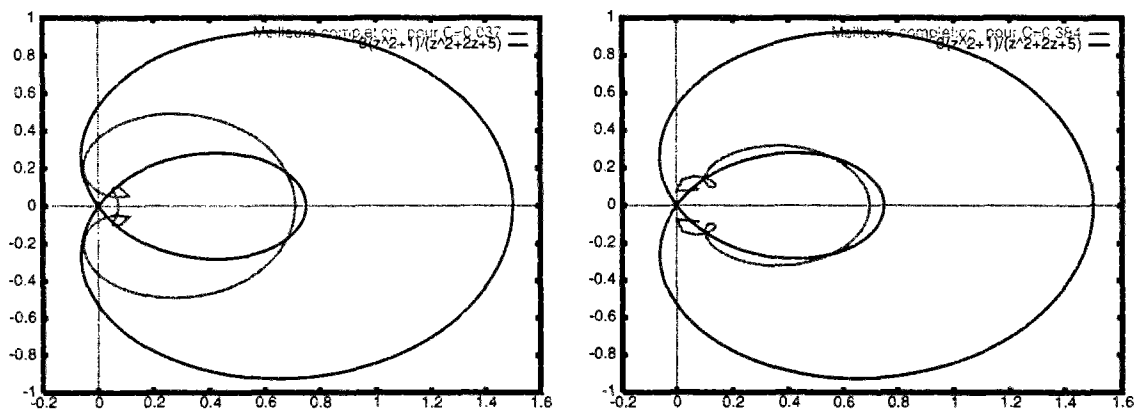


FIG. 12 -

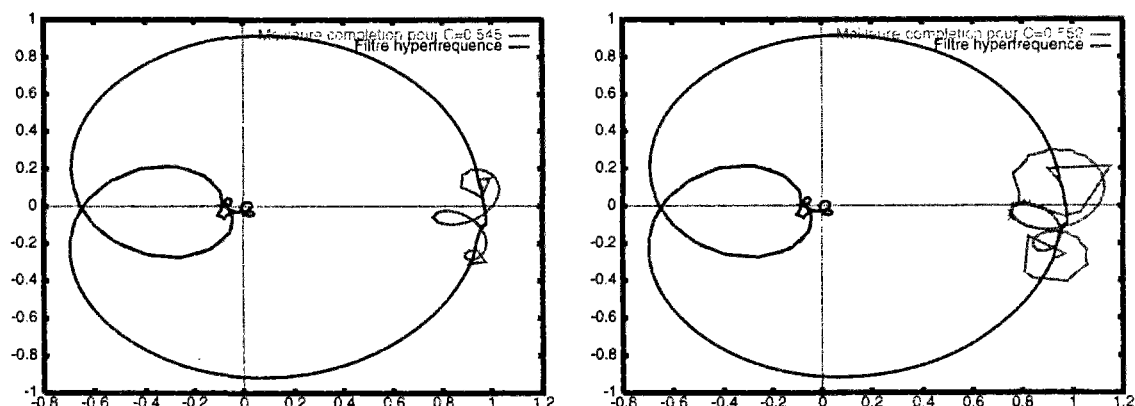
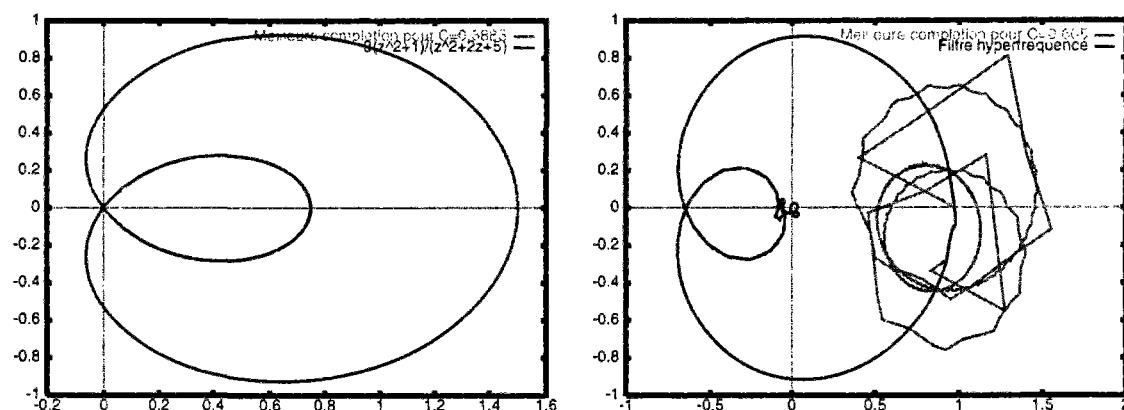


FIG. 13 –

La valeur du paramètre  $C$  qui représente la norme de la complétion sur  $\mathbb{T} \setminus K$  peut être interprétée comme une évaluation de l'énergie non modélisée du système sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Indiquons qu'en absence d'autres critères sur le choix de  $C$ , l'appréciation d'une *bonne* valeur pour cette constante  $C$  reste ici encore un choix subjectif.

Néanmoins, lorsque, comme dans notre second exemple, la fonction  $f$  est la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^2$  et pour la valeur particulière  $C = \|f\|_{L^2(\mathbb{T} \setminus K)}$ , cette complétion n'est autre que la fonction  $f|_{\mathbb{T} \setminus K}$ , théoriquement obtenue pour une valeur infinie du paramètre  $\rho$ . Ainsi ce comportement asymptotique de la solution  $\tilde{h}$  permet de retrouver une fonction de  $H^2$  à partir de sa restriction sur un sous-ensemble strict  $K$  du cercle unité  $\mathbb{T}$ .

Au contraire, lorsque la fonction  $f$  n'est pas la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^2$ , comme dans l'exemple du filtre hyperfréquence, l'augmentation de la contrainte  $C$  et par conséquent de la variable  $\rho$  entraîne celle de la norme sur  $\mathbb{T} \setminus K$  de la complétion  $\tilde{h}$ . Les figures suivantes illustrent ces résultats :



### VI-3 Polynômes de Jackson et de de la Vallée Poussin

Nous avons utilisé les polynômes de Jackson et de la Vallée Poussin dans la première étape de l'algorithme d'identification robuste (cf. section V-4) et dans le problème de la complétion analytique bornée dans  $H^2$  où la fonction  $f$  correspond à une interpolation ou une approximation des données sur  $K$  (cf. IV-3).

Les résultats présentés dans les deux sections précédentes montrent en outre la qualité de l'approximation par les polynômes modifiés de Jackson et de la Vallée Poussin construits à partir

de points non équirépartis (cf. IV-2.2.b). Indiquons simplement que, comme nous l'avons déjà mentionné dans le paragraphe IV-3.2, le caractère uniforme de la convergence de ces polynômes vers la fonction justifie le schéma proposé pour déterminer, à partir des coefficients de Fourier d'une fonction, ceux de sa restriction à un sous-ensemble de son domaine de définition. Les figures suivantes montrent l'exemple d'une fonction constante et de sa restriction sur  $[\pi/2, 3\pi/2] \subset [0, 2\pi]$  calculée respectivement pour 401 et 601 coefficients de Fourier.

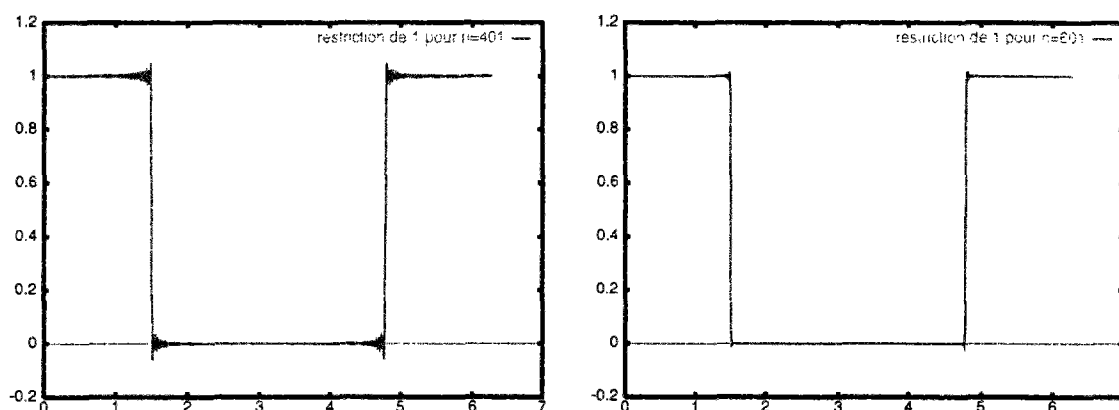


FIG. 14 –

Reprenons l'exemple de la fonction  $f(z) = 3(z^2 + 1)/(z^2 + 2z + 5)$  donnée ici par ses valeurs sur un ensemble de 101 points non équirépartis sur le cercle unité  $\mathbb{T}$ . Les figures suivantes montrent d'une part qu'il est essentiel de respecter la condition d'équirépartition de ces points sur le cercle lors de l'utilisation des polynômes classiques de Jackson ou de de la Vallée Poussin. D'autre part, comme nous l'avons détaillé en section IV-2.2.b, l'utilisation de ces polynômes peut être généralisée au cas des points non équirépartis en introduisant la fonction  $\varphi$  continue, croissante et linéaire par morceaux et qui associe d'une façon monotone, ces points aux points équirépartis fondamentaux sur le cercle unité  $\mathbb{T}$  (cf. section IV-2.1).

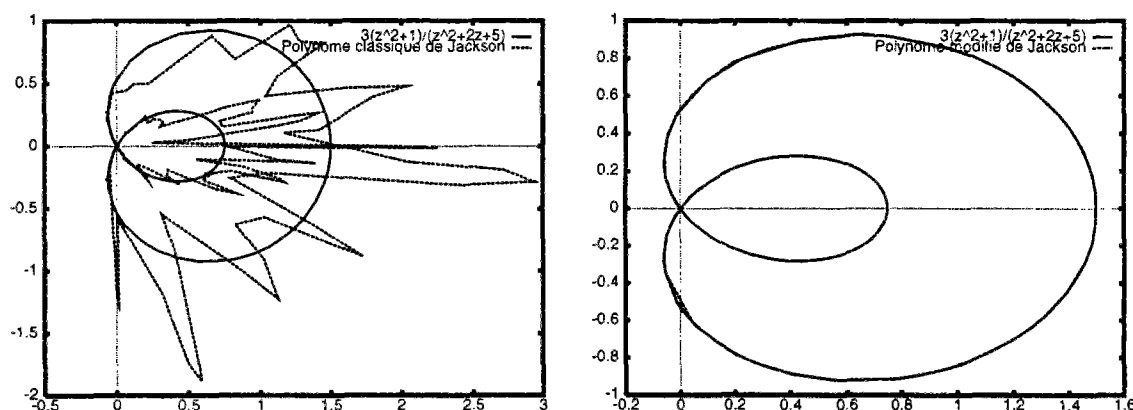


FIG. 15 – Interpolation de Jackson en des points non équirépartis

### Sur l'utilisation de la fonction $\varphi$

L'approche classique pour construire une interpolation ou une approximation d'une fonction donnée par ses valeurs sur un ensemble de points, est de fixer une classe de fonctions puis de choisir un élément de cette classe en supposant que toute l'information est contenue dans les données.

Cette approche conduit généralement à des procédures d'approximation dont la qualité dépend de la densité des points d'évaluation de la fonction.

Considérons l'exemple de la figure 16 ci-contre d'une fonction  $f_1$  continue et linéaire par morceaux. Supposons fixés les abscisses des paliers de  $f_1$  ainsi que les abscisses  $x_1, \dots, x_5$  de 5 points sur ces paliers. Alors cette fonction est entièrement déterminée par ses valeurs aux points  $x_1, \dots, x_5$ . Considérons la fonction  $\varphi$  qui associe aux abscisses  $x_1, \dots, x_5$ , ceux équirépartis sur  $[0, 2\pi]$  puis calculons le polynôme de Jackson modifié  $J_1$ , interpolation de la fonction  $f_1$  en ces points  $x_1, \dots, x_5$  et associé à la fonction  $\varphi$ . La figure suivante montre que l'interpolant ainsi obtenu ne constitue pas une bonne approximation de la fonction  $f_1$ .

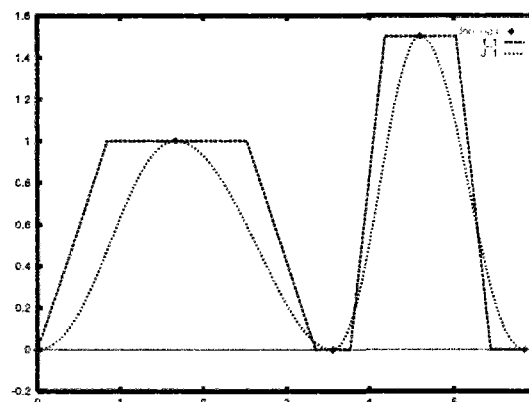


FIG. 16 -

Ce résultat est principalement dû à la pauvreté de l'information utilisée pour construire cette interpolation. Pour permettre une meilleure représentation de la fonction  $f_1$ , nous pouvons augmenter le volume de l'information en donnant les valeurs de  $f_1$  sur un ensemble plus grand de points lorsque c'est possible. Ceci aboutit généralement à l'augmentation de la complexité de représentation de l'interpolant  $J_1$  (degré, ...) ce qui ne favorise pas son utilisation (évaluation, ...).

La fonction  $\varphi$  peut être utilisée pour porter l'information supplémentaire sur la fonction  $f_1$ . Considérons la fonction  $\varphi_1$  suivante qui associe toujours les points  $x_1, \dots, x_5$  à ceux équirépartis sur  $[0, 2\pi]$  et qui est presque constante aux voisinages de ces points de manière à reproduire les paliers de la fonction  $f_1$ . Comme le montre cette figure, le polynôme de Jackson  $J_2$  associé à la fonction  $\varphi_1$  permet d'obtenir une meilleure approximation de la fonction  $f_1$ .

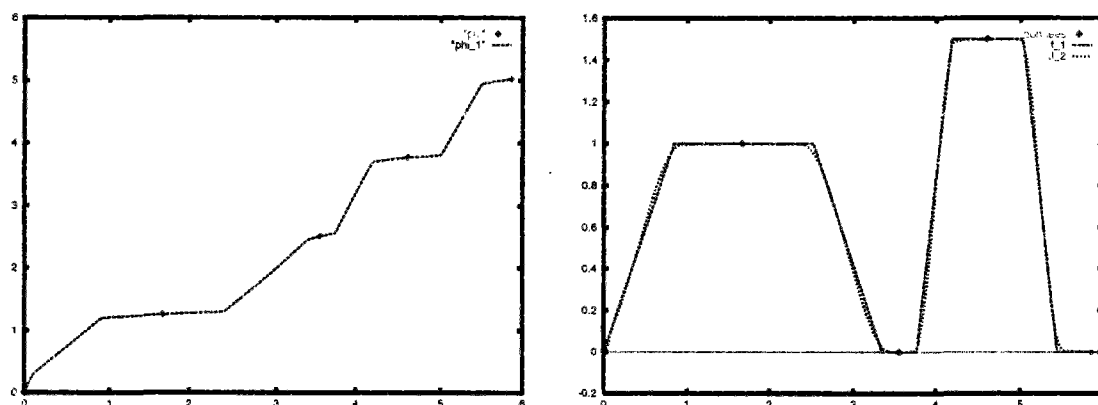


FIG. 17 -

Pour montrer que la fonction  $\varphi_1$ , de par sa construction, ne dépend pas de la valeur de la fonction  $f_1$  mais de sa forme (palier, disposition des points d'évaluation, ...), considérons les deux fonctions suivantes  $f_2$  et  $f_3$  de même allure que  $f_1$  et avec des valeurs différentes aux paliers.

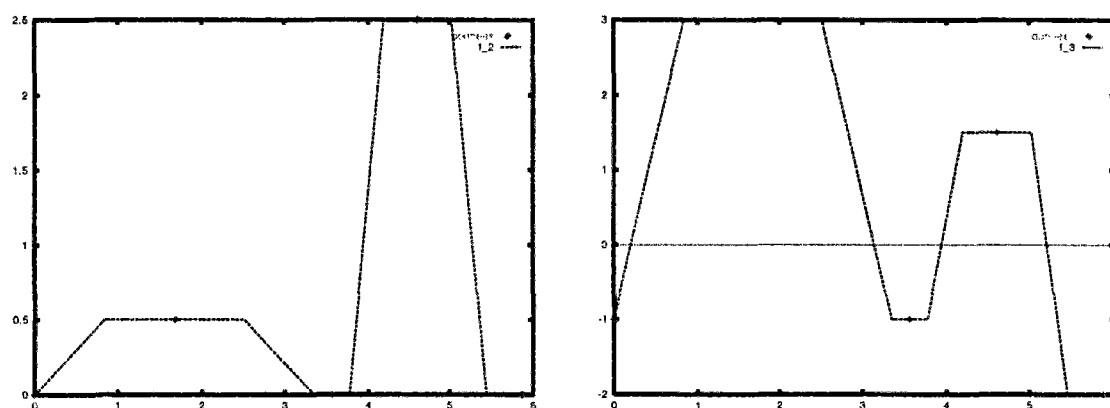


FIG. 18 –

La figure suivante montre que les polynômes de Jackson  $J_3$  et  $J_4$  associés à la fonction  $\varphi_1$  approximent convenablement les fonctions  $f_2$  et  $f_3$ .

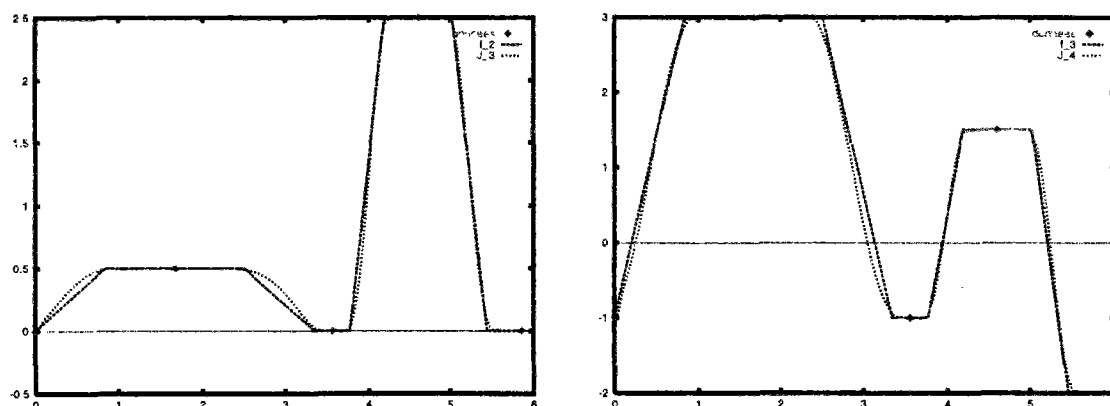


FIG. 19 –

Cette remarque sur l'utilisation de la fonction  $\varphi$  peut être utile lorsqu'on cherche à réduire le nombre de mesure dans l'approximation de signaux dont on connaît à l'avance la forme (carré, triangle, constante, ...).

Il pourrait être intéressant de regarder comment étendre aux cas de points non équirépartis, des algorithmes de calcul classiques (FFT, DFT, ...) dont l'utilisation est limitée par des hypothèses d'équirépartition sur les points.



## Chapitre VII

# Conclusion

L'identification robuste  $H^\infty$  des systèmes linéaires à partir de données fréquentielles bruitées a connu de nombreux développements ces dernières années [34, 40, 56, 58]. La contribution de cette thèse consiste en la prise en compte explicite du caractère local en fréquence c'est à dire du fait que les données ne sont disponibles que dans une bande limitée de fréquence  $\Omega \subset i\mathbb{R}$  et non sur tout l'axe imaginaire  $i\mathbb{R}$ . Par la transformation de Möbius classique  $\mathcal{M}$ , on se ramène au cas du cercle unité  $\mathbb{T}$  où les données expérimentales sont les valeurs approchées d'une fonction  $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$  sur l'arc  $K$  transformé de  $\Omega$  par  $\mathcal{M}$ .

L'approche que nous avons adopté pour résoudre ce problème d'identification robuste  $H^\infty$  à partir de données expérimentales sur une bande de fréquence se caractérise par l'introduction d'un comportement de référence  $h$  que la meilleure approximation  $g$  dans  $H^\infty$  doit suivre sur  $\mathbb{T} \setminus K$  avec une certaine tolérance  $r$  où  $r$  est une fonction continue et positive sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Nous avons proposé un algorithme en deux étapes qui, moyennant de faibles conditions de régularité sur le gabarit  $r$ , permet de garantir la continuité de la meilleure approximation  $g$  ainsi que sa convergence robuste vers  $f$  sur  $K$  tout en respectant asymptotiquement la contrainte  $|g - h| \leq r$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ .

Plus généralement, le problème d'identification fréquentielle à partir de données expérimentales sur une bande de fréquence peut être considéré dans  $H^p$  pour  $1 \leq p \leq \infty$ . Le choix de  $p$  traduit le type de stabilité souhaité. Après une première étape d'interpolation des données ponctuelles sur  $K$  par une fonction, disons  $f$  pour reprendre les notations du chapitre III, et si on se dote d'un comportement de référence  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  et d'une contrainte constante  $M$ , ce problème s'énonce comme un problème extrémal borné généralisation naturelle du problème extrémal classique : on cherche une fonction  $g \in H^p$  telle que la norme de la différence  $g - h$  dans  $L^p(\mathbb{T} \setminus K)$  n'excède pas  $M$  et telle que  $g - f$  soit de norme minimale dans  $L^p(K)$ . L'existence pour tout  $p$  d'une telle fonction  $g$  et son unicité pour  $p < \infty$  sont données par Baratchart et *al.* dans [10, 3] (cf. chapitre III). Hormis dans l'espace hilbertien  $H^2$  et dans l'espace  $H^\infty$  (où ce problème est équivalent à un problème de Nehari), la résolution du problème extrémal dans  $H^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , n'est pas en général constructive. La détermination d'un procédé rendant explicite la solution du problème extrémal classique et plus généralement du problème extrémal borné fait l'objet d'un travail de recherche au sein du projet MIAOU [71]. Une version *pondérée* du problème extrémal borné dans  $H^2$  a été considérée dans  $H^2(d\mu)$  où  $\mu$  est une mesure positive finie sur le cercle unité [49].

Nous avons montré dans le chapitre VI que, par un ajustement des deux paramètres  $h$  et  $r$  du problème d'identification robuste  $H^\infty$ , il est possible de choisir un compromis entre la qualité de l'approximation des données sur  $K$  et l'allure de l'approximant sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . Le choix simultané de ces deux paramètres pour un bon compromis est un problème difficile. En se souvenant que la contrainte sur  $\mathbb{T} \setminus K$  était initialement introduite dans le problème extrémal borné pour contrôler le comportement sur  $\mathbb{T} \setminus K$  des approximations admissibles de  $f \vee h$  (concaténation des fonctions  $f$  sur  $K$  et  $h$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ ), sa présence peut être re-formulée comme une contrainte sur les extensions admissibles  $h$  de  $f$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$ . La recherche de ce bon compromis peut alors être entendue comme



la détermination d'une fonction  $\tilde{h}$  de norme raisonnable et qui étend les données à tout le cercle de façon à ce que l'ensemble soit aussi proche que possible de  $H^\infty$ . Ceci amène naturellement à considérer pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , le problème quelque peu dual du problème extrémal borné que constitue la meilleure complétion analytique bornée : la recherche, pour  $f \in L^p(K)$  fixée, d'une fonction  $\tilde{h} \in L^p(\mathbb{T} \setminus K)$  de norme au plus égale à une constante positive  $C$  sur  $\mathbb{T} \setminus K$  telle que  $f \vee \tilde{h}$  est la proche possible de  $H^p$ . Pour  $p = 2$ , le problème de la meilleure complétion analytique bornée admet une solution explicite [12]. Le problème de la meilleure complétion bornée dans  $H^\infty$  a été récemment résolue dans [9].

# Bibliographie

- [1] V. M. Adamyan, D. Z. Arov, and M. G. Krein. Infinite Hankel matrices and generalized Carathéodory-Fejér and Riesz problems. *Funt. Anal. Appl.*, 2:1–18, 1968.
- [2] D. Alpay, L. Baratchart, and J. Leblond. Hardy approximation in  $L^p$  functions of an arc. Technical report, INRIA, 1993.
- [3] D. Alpay, L. Baratchart, and J. Leblond. Some extremal problems linked with identification from partial frequency data. In Springer Verlag, editor, *10th conference on analysis and optimization of systems*, pages 563–573, Sophia-Antipolis, 1993.
- [4] D. Alpay and J. Leblond. Loewner Interpolation in Matrix Hardy Classes. *Journal for Analysis and its Applications*, 1995.
- [5] K. I. Babenko. An inequality in the theory of Fourier integrals. *Amer Math. Soc. Transl. (2)*, 44:115–128, 1961.
- [6] E.W. Bai and S. Raman. Interpolatory algorithm for robust system identification with corrupted measurement data. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 38:1236–1241, 1993.
- [7] L. Baratchart. *Sur l'approximation rationnelle  $L^2$  pour les systèmes dynamiques linéaires*. Doctorat d'état en mathématiques, Université de Nice, 1987.
- [8] L. Baratchart and J. Leblond. On robust identification from partial frequency data. In *Proc. of the 2nd European Control Conference ECC 93, Groningen, Netherlands*, 1993.
- [9] L. Baratchart, J. Leblond, and J. R. Partington. Best bounded  $H^\infty$  extension of partial frequency data. *in preparation*, 1995.
- [10] L. Baratchart, J. Leblond, and J.R. Partington. Hardy approximation to  $L^p$  functions on subsets of the circle. Technical report, INRIA No 2377, 1994.  $H^\infty$  case to be published in *Constructive Approximation*, 1995.
- [11] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington, and N. Torkhani. Robust identification in the disc algebra from band-limited data. *Submitted for publication to IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 1995.
- [12] L. Baratchart, J. Leblond, and N. Torkhani. Best bounded  $H^2$  completion of partial frequency data. In A. Isidori, S. Bittanti, E. Mosca, A. De Luca, M.D. Di Benedetto, and G. Oriolo, editors, *Proc. of the 3rd European Control Conference*, volume 2, pages 1330–1335. Rome, September 1995.
- [13] B. Beauzamy. *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*. North-Hollande Mathematics Studies 68, 1985.
- [14] W. Beckner. Inequalities in Fourier Analysis. *Ann. of Math.*, 102:159–182, 1975.
- [15] C. Bennett and R. Sharpley. *Interpolation of Operators*. Academic press, inc., 1988.

- [16] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, 1987.
- [17] C. Caquineau. Une décomposition SVD sur la Connection Machine. Notes internes, 1993.
- [18] M. Cardelli. *Contribution à l'approximation rationnelle  $L^2$  des fonctions de transfert*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1990.
- [19] L. Carleson and S. Jacobs. Best uniform approximation by analytic functions. *Arkiv for matematik*, 10:219–229, 1972.
- [20] E. W. Cheney. *Introduction to Approximation Theory*. Chelsea, 1982.
- [21] C.K. Chui and G. Chen. *Linear Systems and Optimal Control*. Springer-Verlag. Springer Series in Information Theory, 1989.
- [22] G. Chen C.K. Chui. *Signal Processing and Systems Theory*. Springer Series in Information Sciences. Springer-Verlag, 1992.
- [23] B. D'Andréa-Novel and M. Cohen de Lara. *Commande linéaire des systèmes dynamiques*. Masson, 1994.
- [24] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum. *Feedback control theory*. Macmillan Publishing Company, 1992.
- [25] P. L. Duren. *Theory of  $H^p$  Spaces*. Academic Press, 1970.
- [26] R.E. Edwards. *Fourier Series : A Modern Introduction Volume 1*. Second Edition. Springer-Verlag, 1979.
- [27] P. Faure and M. Robin. *Éléments d'automatique*. Dunod, 1984.
- [28] P. Fulcheri. *Identification and matrix rational  $H^2$  approximation*. PhD thesis, Université de Nice, 1995.
- [29] J. B. Garnett. *Bounded analytic functions*. Academic Press, 1981.
- [30] K. Glover. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L^\infty$  errors bounds. *Int. J. Control*, 39(6):1115–1193, 1984.
- [31] K. Glover, J. Lam, and J. R. Partington. Rational Approximation of a Class of Infinite dimensional systems I : Singular Values of Hankel Operators. *Math. Control Signals Systems*, 3:325 – 344, 1990.
- [32] G.H. Golub and C.F Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1990.
- [33] G. Gu and P. P. Khargonekar. A class of algorithms for identification in  $H_\infty$ . *Automatica*, 28(2):299–312, 1992.
- [34] G. Gu and P. P. Khargonekar. Linear and nonlinear algorithms for identification in  $H_\infty$  with error bounds. *IEEE transactions on automatic control*, 37(7):953–963, July 1992.
- [35] E. J. Hannan and M. Deistler. *The Statistical Theory of LINEAR SYSTEMS*. John Wiley and Sons, 1988.
- [36] E. Hayashi, L. N. Trefethen, and M. H. Gutknecht. The CF Table. *Constructive Approximation*, 6:195–223, 1990.
- [37] A.J. Helmicki, C.A. Jacobson, and C.N. Nett.  $H_\infty$  Identification of Stable LSI Systems : A scheme with Direct Application to Controller Design. In *Proceedings of the American Control Conference*, 1989.

- [38] A.J. Helmicki, C.A. Jacobson, and C.N. Nett. Identification in  $H_\infty$ : A Robustly Convergent, Nonlinear Algorithm. In *Proceedings of the American Control Conference*, 1990.
- [39] A.J. Helmicki, C.A. Jacobson, and C.N. Nett. Identification in  $H_\infty$ : The continuous-time case. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1893–1898, 1990.
- [40] A.J. Helmicki, C.A. Jacobson, and C.N. Nett. Control Oriented System Identification: A Worst-case/Deterministic Approach in  $H_\infty$ . *IEEE Transactions on automatic control*, 36(10):1163–1176, October 1991.
- [41] J. W. Helton and F. Schwartz. The best approximation to a vector-valued continuous function from the bounded analytic functions. preprint, 1987.
- [42] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis*, volume 3. A Wiley-interscience publication, 1985.
- [43] K. Hoffman. *Banach spaces of analytic functions*. Dover, 1988.
- [44] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [45] R. E. Kalman. "Algebraic aspects of the theory of dynamical systems "in *Dynamical Equations and Dynamical Systems*. Academic Press, New York, 1967.
- [46] P. Koosis. *Introduction to  $H_p$  spaces*. Cambridge University Press, 1988.
- [47] S. Lang. *Differential manifolds*. Addison Wesley Publishing Company, 1972.
- [48] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur : Tomes 1 et 2*. Masson, 1986.
- [49] J. Leblond and M. Olivi. Approximation pondérée de fonctions de transfert scalaires. preprint, 1994.
- [50] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, 1987.
- [51] G. G. Lorentz. *Approximation of functions*. Chelsea, 1986.
- [52] N. Maïzi. *Réduction au sens de la norme de Hankel de modèles dynamiques de dimension infinie*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 1992.
- [53] P. M. Mäkilä and J. R. Partington. Robust approximation and identification in  $H^\infty$ . In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 70–76, 1992.
- [54] M. Marden. *Geometry of Polynomials*. American Mathemaical Society, 1989.
- [55] Projet Miaou and Projet Safir. Rapport final d'exécution de la commande 962/293/0588. Technical report, INIRA (Centre de Sophia-Antipolis) pour le CNES (Centre spacial de Toulouse), 1994.
- [56] J. R. Partington. Robust identification and interpolation in  $H_\infty$ . *Int. J. Control*, 54(5):1281–1290, 1991.
- [57] J. R. Partington. Robust identification in  $H_\infty$ . *J. Math. Anal. and Appl.* 66: 428:441, 1992.
- [58] J. R. Partington. Algorithms for identification in  $H_\infty$  with unequally spaced function measurements. *Int. J. Control*, 58(1):21–31, 1993.
- [59] J.R. Partington. *An Introduction to Hankel Operators*. London Mathematical Society, Student texts 13, 1988.
- [60] D. J. Patil. Representation of  $H^p$ -Functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 78(4):617–620, July 1972.

- [61] V. V. Peller. Hankel operators and continuity properties of operators of best approximation. *Leningrad Math. J.*, 2(1):139–160, 1991.
- [62] V. V. Peller. Boundedness properties of the operators of best approximation by analytic and meromorphic functions. *Arkiv för Matematik*, 30(2):331–343, 1992.
- [63] L. Povy. *Identification des processus*. Dunod université, 1975.
- [64] M.J.D. Powell. *Approximation theory and methods*. Cambridge University Press, 1981.
- [65] S. C. Power. *Hankel Operators on Hilbert Spaces*. Pitman advanced publishing program, 1982.
- [66] E. Ramis, C. Deschamps. and J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales*. Masson, 1981.
- [67] T. J. Rivlin. *An Introduction to the Approximation of Functions*. Dover Publications, Inc, New York, 1981.
- [68] M. Rosenblum and J. Rovnyak. Restrictions of analytic functions II. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 51, pages 335–343, 1975.
- [69] M. Rosenblum and J. Rovnyak. *Hardy Classes and Operator Theory*. Oxford Mathematical Monographs, 1985.
- [70] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Mc Graw Hill, 1982.
- [71] F. Seyfert. *Contribution à l'identification fréquentielle dans  $H^p$  pour  $1 \leq p \leq \infty$* . PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 1997.
- [72] T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall Englewood Cliffs N. J., 1989.
- [73] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [74] N. Torkhani. Interpolation et identification robustes dans  $H^\infty$  sur la connection machine cm200. Technical report, INRIA, 1995.
- [75] N. Torkhani. Robust interpolation and approximation for  $A(\mathbb{D})$  functions on subsets of the circle. *in preparation*, 1995.
- [76] M. Vidyasagar. *Control System Synthesis*. The MIT Ppress, 1987.
- [77] N. F. Dudley Ward and J. R. Partington. Robust Identification in the Disc Algebra using Rational Wavelets and Orthogonal Basis Functions. *Preprint*, 1995.
- [78] C. Van Winter. Fredholm equations on a Hilbert space of analytic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 162:103–1390, 1971.
- [79] M. Wonham. *Linear Multivariable Control*. Springer-Verlag, New York, 1974.
- [80] N.J. Young. *An introduction to Hilbert space*. Cambridge University Press, 1988.
- [81] L. A. Zadeh. From circuit theory to system theory. *Proc. I.R.E.*, 50:856–865, 1962.
- [82] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, volume I. Springer-Verlag, 1986.
- [83] A. Zygmund. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 1959.

## RÉSUMÉ

Cette thèse concerne le problème d'identification robuste  $H^\infty$  de données harmoniques sur une bande limitée de fréquence, généralisation plus réaliste du problème d'identification robuste  $H^\infty$  étudié ces dernières années notamment par Gu, Helmiki, Jacobson, Kargonekhar, Mäkilä, Nett et Partington. L'introduction, en dehors de cette bande, d'un comportement de référence et d'un gabarit rend possible une adaptation des algorithmes classiques en deux étapes. La solution du problème posé est alors donnée par la résolution d'un problème extrémal borné après une première étape d'interpolation robuste des données sur un arc du cercle unité. Cependant, la solution ainsi calculée est typiquement discontinue. La principale contribution de ce travail à l'identification fréquentielle robuste consiste à montrer qu'il est possible de prendre en compte le caractère local des données en fréquence et garantir l'appartenance de la solution à l'algèbre du disque. Un algorithme est donné et sa mise en œuvre numérique est détaillée. Le choix du comportement en dehors de la bande considérée pose plus généralement le problème de complétion analytique borné dans  $H^p$ . Nous le résolvons dans  $H^2$  et l'utiliserons pour vérifier la validité de l'hypothèse de linéarité du système.

**Mots-clés :** Systèmes linéaires, identification robuste, espaces de Hardy, problèmes extrémaux duaux, problèmes extrémaux bornés, problèmes de complétions analytiques bornées interpolation robuste.

## Abstract

This thesis deals with the robust identification in  $H^\infty$  from band-limited data, a natural generalization of robust  $H^\infty$  identification problem as studied for instance by Gu, Helmiki, Jacobson, Kargonekhar, Mäkilä, Nett or Partington. The introduction of a prescribed behaviour and a gauge function allows an adaptation of classical two stage algorithm. The solution is then that of a bounded extremal problem after a first robust interpolation stage of data on a subset on the unit circle. This leads to a typically discontinuous solution. The main contribution of present work to robust harmonic identification consists to build, from band-limited data, a robust model in the disc algebra. An algorithm is given and numerical issues are developed. The choice of the behaviour off the bandwidth leads to introduce the analytic completion problem in  $H^p$ . The solution in the  $H^2$  case provides us some ways of assessing the validity of the linearity assumption of the system

**Keywords :** Linear systems, robust identification, Hardy spaces, dual extremal problems, bounded extremal problems, bounded analytic completion, robust interpolation.